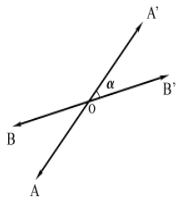
TEMA 5 – RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

5.1 – DEFINICIÓN DE ÁNGULO Y UNIDADES DE MEDIDA DE LOS ÁNGULOS

Ángulo es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que *se encuentran en el mismo plano* y *se intersectan* (rectas secantes), el punto de intersección de éstas recibe el nombre de **vértice**.



Donde:

$\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$: Lineas rectas que se cruzan en el plano.

O : Vertice

$\angle\alpha$: Angulo α

$\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$: Lados del angulo

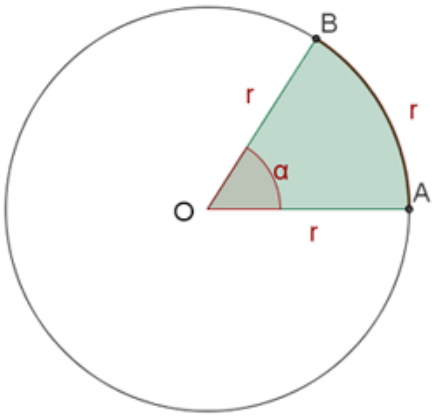
Para **medir ángulos** se utilizan las siguientes unidades:

GRADO SEXAGESIMAL

La unidad de medida de los ángulos se llama grado, y resulta de dividir un ángulo recto en 90 partes iguales, por lo tanto, un ángulo recto mide 90º.
Uno de los sistemas de medición de los ángulos se llama sexagesimal.

RADIÁN (RAD)

Es la medida de un **ángulo** cuyo **arco mide un radio**.



El ángulo α de la figura mide un radian ya que el arco r es de la misma longitud que el radio

2π rad = 360° ; π rad = 180°

30º ⟶ ¿rad?

Conversión grado➔ radian

$$\frac{\pi}{\alpha}=\frac{180^o}{30^o}\Rightarrow\alpha=\frac{30\pi}{180}=\frac{\pi}{6}rad$$

Conversión radian➔grado

$\frac{\pi}{3}$ rad ⟶ ¿º?

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=\frac{180^o}{\alpha}\Rightarrow 3\alpha=180^o\Rightarrow\alpha=\frac{180^o}{30^o}=60^o$$

CONVERSIÓN DE GRADOS A RADIANES Y VICEVERSA.

1.- De x grados a radianes:

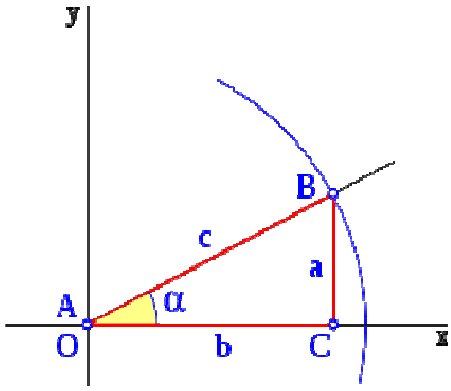
$$\alpha=\frac{x.\pi}{180}$$

2.- De α radianes a grados:

$$x=\frac{\alpha.180}{\pi}$$

5.2 – RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO (0º a 90º)

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo en C; lo usaremos para definir las razones *seno, coseno y tangente, cosecante, secante y cotangente* del ángulo α, correspondiente al vértice A, situado en el centro de la circunferencia.



El seno (abreviado como *sen*, o *sin* por llamarse "sinus" en latín) es la razón entre el cateto opuesto sobre la hipotenusa,

$$sen\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c}$$

El coseno (abreviado como *cos*) es la razón entre el **cateto adyacente sobre la hipotenusa**, $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{b}{c}$

La tangente (abreviado como *tan* o *tg*) es la razón entre el cateto opuesto sobre el cateto adyacente,

$$tg\alpha = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{a}{b}$$

La Cosecante: (abreviado como csc o cosec) es la razón recíproca de seno, o también su inverso multiplicativo:

$\csc\alpha = \frac{1}{sen\alpha} = \frac{\overline{AB}}{CB} = \frac{c}{a}$ (el inverso de la razón seno α)

La secante (abreviado como *sec*) es la razón entre la hipotenusa sobre el cateto adyacente

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b}$ (el inverso de la razón coseno α)

La cotangente (abreviado como co*tan* o *ctg*) es la razón entre el cateto adyacente sobre el cateto opuesto,

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{\overline{AC}}{CB} = \frac{b}{a}$$

Radianes	Grados sexag.	seno	coseno	tangente	cosecante	secante	cotangente
0	0º	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0	∄	1	∄
$\frac{1}{6}\pi$	30º	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{1}{4}\pi$	45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{1}{3}\pi$	60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	90º	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	∄	1	∄	0

5.3 – RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA (0º a 360º)

Se llama **circunferencia goniométrica** o **trigonométrica** a aquélla que tiene su **centro en el origen de coordenadas** y su **radio** es **la unidad**. En la circunferencia goniométrica **los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes** que se numeran en sentido contrario a las agujas del reloj.

QOP y TOS son triángulos semejantes.QOP y T'OS' son triángulos semejantes.

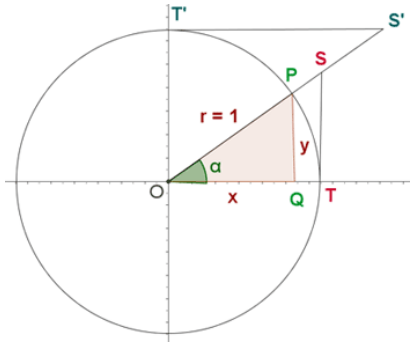
QOP y T'OS' son triángulos semejantes.

$$\text{sen } \alpha = \frac{PQ}{OP} = \frac{PQ}{r} = PQ \qquad \text{cosec } \alpha = \frac{OP}{PQ} = \frac{OS'}{OT'} = \frac{OS'}{r} = OS'$$

$$\cos \alpha = \frac{OQ}{OP} = OQ \qquad \sec \alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{OS}{OT} = \frac{OS}{r} = OS$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{PQ}{OQ} = \frac{ST}{OT} = \frac{ST}{r} = ST \qquad \text{cotg } \alpha = \frac{OQ}{PQ} = \frac{S'T'}{OT'} = \frac{S'T'}{r} = S'T'$$

El punto P tiene por coordenadas (x,y) por tanto el valor x está comprendido entre los valores [-1,1] al igual que los valores posibles de y



El seno es la ordenada del punto P.(y)

El coseno es la abscisa del punto P.(x)

$-1 \leq \text{sen } \alpha \leq 1$

$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

Las líneas trigonométricas se pueden ver en la figura:

La línea de seno es PQ

La Línea de coseno es OQ

La línea tangente es la línea ST

La línea secante es OS

T'S' es la cotangente

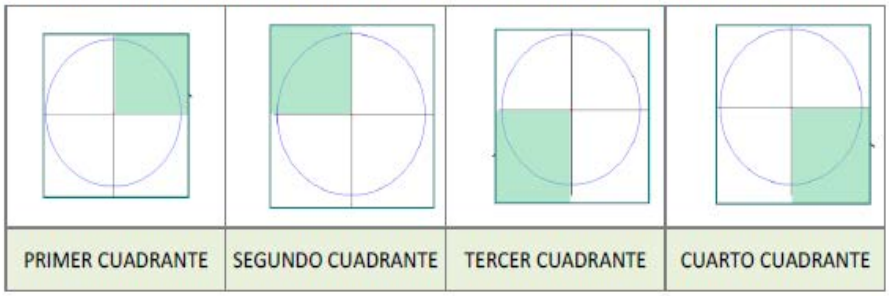
OS' es la cosecante

Se llama **circunferencia trigonométrica** o *goniométrica* a una circunferencia de radio unidad centrada en el origen de coordenadas.

Es posible representar cualquier ángulo en la circunferencia trigonométrica. Para ello siempre se toma un lado fijo que es la semirrecta definida por la parte positiva del eje de abscisas; el segundo lado es la semirrecta variable que corresponda según su medida. El sentido de un ángulo se mide de OX a la semirrecta variable que determina su amplitud. Se entiende que para un ángulo negativo coincide con el de las agujas de un reloj analógico y para un ángulo positivo, el contrario.

El punto $P = (x_\alpha, y_\alpha)$, el punto $(x_\alpha, 0)$ y el origen de coordenadas delimitan un triángulo. Este triángulo es SIEMPRE rectángulo y su hipotenusa es SIEMPRE uno (puesto que es el radio de la circunferencia).

La circunferencia trigonométrica divide al plano en cuatro regiones que se denominan cuadrantes.



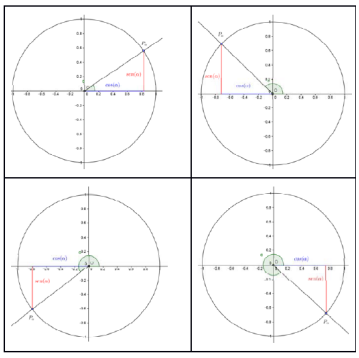
Como puedes ver en la figura, si el ángulo está en el primer cuadrante, tenemos un ángulo agudo. Podemos pues calcular sus razones trigonométricas:

$$sen(\alpha) = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha,\ \cos(\alpha) = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha \text{ y } tg(\alpha) = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Ahora bien, esta definición tiene también sentido cuando el ángulo está en cualquiera de los otros cuadrantes.

Haciendo la misma construcción, se calcula el punto $P_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha)$ y se definen el seno, coseno y tangente a partir de sus componentes, de la misma manera.

$$sen(\alpha) = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha,\ \cos(\alpha) = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha \text{ y } tg(\alpha) = \frac{y_\alpha}{x_\alpha} = \frac{sen(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

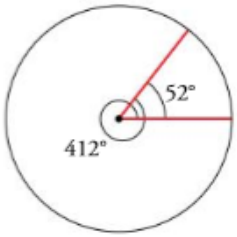


La única diferencia es que las componentes de P_α pueden ser nulas o negativas y por tanto las razones trigonométricas pueden ser nulas y negativas. Asimismo, observa que si el coseno es 0 la tangente no está definida. En la figura puedes ver un ejemplo en el segundo cuadrante

De este modo, se conserva la definición para ángulos agudos que son ángulos del primer cuadrante y se amplía a ángulos de cualquier signo y amplitud. En las figuras siguientes aparecen el seno y coseno de cualquier cuadrante.

5.4 – RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS MAYORES DE 360º

En el intervalo [0º,360º) se encuentran todos los ángulos, sean cuales sean sus amplitudes. No obstante, se le puede dar sentido a ángulos mayores de 360º.



Veamos el siguiente ejemplo. 412º=360º + 52º. 412º es una vuelta completa, más un ángulo de 52º. Por esto las razones trigonométricas de 412º y las de 52º coinciden, ya que son el mismo ángulo.

En general, $\alpha = \alpha + 360° \cdot n$, donde n es un número entero (positivo o negativo).

5.5 – RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NEGATIVOS

Con frecuencia los ángulos que quedan situados debajo del eje *X*, es decir los comprendidos entre 180º y 360º, se designan con una medida negativa. En tal caso, las medidas de los ángulos se dan en en el intervalo (-180,0].

Si $0° < \alpha < 180°$, entonces a $360° - \alpha$ se le suele llamar, simplemente, $-\alpha$.

Se dice que α y $-\alpha$ son opuestos.

El coseno de dos ángulos opuestos es el mismo, el seno cambia de signo.

5.6 – Relación entre las razones trigonométricas de algunos ángulos.

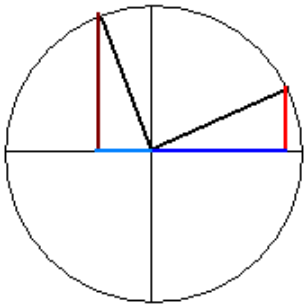
Es posible relacionar las razonas trigonométricas de cualquier cuadrante con las del primercuadrante. De forma que manejando bien el primer cuadrante podemos conocer las razones trigonométricas de cualquier ángulo.

5.6.1. – Relación entre las razones trigonométricas de algunos ángulos del primer cuadrante y sengundo cuadrante. Ángulos que difieren 90º.

$\cos \beta = \cos (90 + \alpha) = - \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} (90 + \alpha) = \cos \alpha$

$\operatorname{tag} \beta = \operatorname{tag} (90 + \alpha) = - \operatorname{ctg} \alpha$



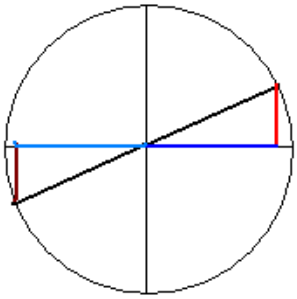
5.6.2. – Relación entre las razones trigonométricas de algunos ángulos del primer cuadrante y tercer cuadrante. Ángulos que difieren 180º.

ÁNGULOS QUE SE DIFERENCIAN EN 180º $\beta = 180 + \alpha$

$\cos \beta = \cos (180 + \alpha) = - \cos \alpha$

$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} (180 + \alpha) = - \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{tag} \beta = \operatorname{tag} (180 + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$



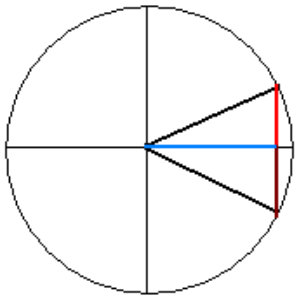
5.6.3. – Relación entre las razones trigonométricas de algunos ángulos del primer cuadrante y cuarto cuadrante. Ángulos opuestos.

ÁNGULOS OPUESTOS

$\cos (-\alpha) = \cos (360 - \alpha) = \cos \alpha$

$\operatorname{sen} (-\alpha) = \operatorname{sen} (360 - \alpha) = - \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{tag} (-\alpha) = \operatorname{tag} (360 - \alpha) = - \operatorname{tg} \alpha$



5.6.4. – Relación entre las razones trigonométricas de ángulos que suman 90º.

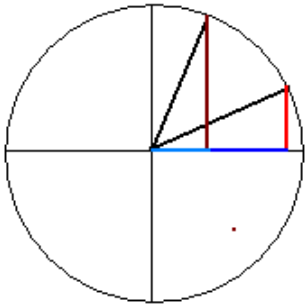
ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Dos ángulos se dice que son complementarios cuando suman 90º : Si $\alpha + \beta = 90º$

$\cos \beta = \cos (90 - \alpha) = \text{sen } \alpha$

$\text{sen } \beta = \text{sen } (90 - \alpha) = \cos \alpha$

$\text{tag } \beta = \text{tag } (90 - \alpha) = \text{ctg } \alpha$



5.6.5. – Relación entre las razones trigonométricas de ángulos que suma 180º.

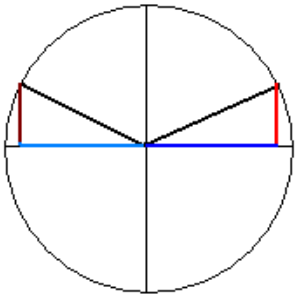
ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS

Dos ángulos se dice que son suplementarios si suman 180º: $\alpha + \beta = 180º$

$\cos \beta = \cos (180 - \alpha) = - \cos \alpha$

$\text{sen } \beta = \text{sen } (180 - \alpha) = \text{sen } \alpha$

$\text{tag } \beta = \text{tag } (180 - \alpha) = - \text{tg } \alpha$



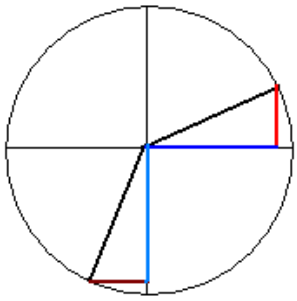
5.6.5. – Relación entre las razones trigonométricas que suma 270º.

ÁNGULOS QUE SUMAN 270º $\alpha + \beta = 270º$

$\cos \beta = \cos (270 - \alpha) = - \text{sen } \alpha$

$\text{sen } \beta = \text{sen } (270 - \alpha) = - \cos \alpha$

$\text{tag } \beta = \text{tag } (270 - \alpha) = \text{ctg } \alpha$



5.7 – Relaciones fundamentales de las razones trigonométricas.

Se cumple para todos los ángulos que:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

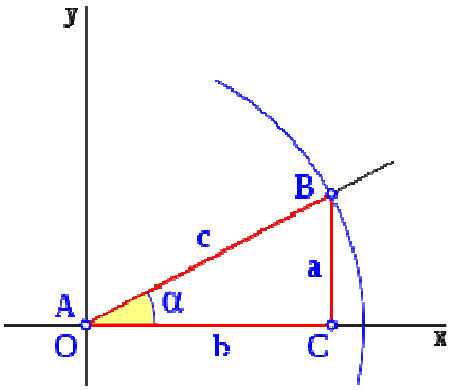
DEMOSTRACIÓN:

Teorema de Pitágoras : $b^2 + a^2 = c^2$

Dividiendo entre b^2 : $1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Rightarrow 1 + tag^2\,\alpha = sec^2\,\alpha$

Dividiendo entre a^2 : $\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 1 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Rightarrow cotag^2\,\alpha + 1 = cosec^2\,\alpha$

Dividiendo entre c^2 : $\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha + sen^2\,\alpha = 1$



5.7 – Fórmulas trigonométricas.

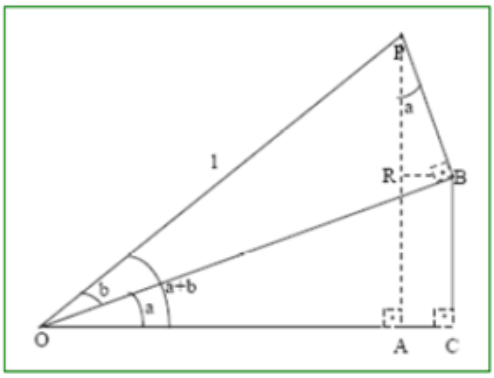
5.7.1 – Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Muchas veces es de utilidad poder calcular las razones trigonométricas de una suma de ángulos a partir de conocer las razones trigonométricas de los ángulos independientes.

El objetivo del presente apartado es expresar las razones $sen(a+b)$, $cos(a+b)$ y $tg(a+b)$ en función de $sen(a)$, $sen(b)$, $cos(a)$, $cos(b)$, $tg(a)$ y $tg(b)$.

Para el cálculo utilizaremos la siguiente figura formada por dos triángulos rectángulos OCB y OBP superpuestos. La hipotenusa OB de un triángulo es un cateto del otro. En la figura a la hipotenusa OP le daremos el valor de 1 unidad. En la construcción se obtiene un tercer triángulo rectángulo OAP en donde el ángulo del vértice O es la suma de los ángulos $(a+b)$ de los otros dos triángulos (a y b).

Por propiedades de perpendicularidad podemos ver otro triángulo rectángulo semejante PRB (iguales ángulos y lados proporcionales) al triángulo OCB. Para entender la semejanza sólo tienes que ver que los lados de los triángulos son perpendiculares.



Nuestro objetivo es poner las razones trigonométricas del ángulo $a+b$, del triángulo OPA en función de a y b. Vamos a calcular el seno y el coseno de este ángulo:

$$sen\,(a+b) = AP = AR + RP = CB + RP$$
$$\cos\,(a+b) = OA = OC - AC = OC - RB$$

Pongamos los segmentos CB, RP, OC y RB en función de los ángulos de a y b:

Pongamos los segmentos CB, RP, OC y RB en función de los ángulos de a y b:

$$sen(a) = \frac{CB}{OB} \rightarrow CB = OB \cdot sen(a)$$
$$sen(a) = \frac{RB}{PB} \rightarrow RB = PB \cdot sen(a)$$
$$\cos(a) = \frac{RP}{PB} \rightarrow RP = PB \cdot \cos(a)$$
$$\cos(a) = \frac{OC}{OB} \rightarrow OC = OB \cdot \cos(a)$$
$$sen(b) = \frac{PB}{1} \rightarrow PB = sen(b)$$
$$\cos(b) = \frac{OB}{1} \rightarrow OB = \cos(b)$$

$$sen(a) = \frac{CB}{OB} \rightarrow CB = OB \cdot sen(a)$$
$$sen(a) = \frac{RB}{PB} \rightarrow RB = PB \cdot sen(a)$$
$$\cos(a) = \frac{RP}{PB} \rightarrow RP = PB \cdot \cos(a)$$
$$\cos(a) = \frac{OC}{OB} \rightarrow OC = OB \cdot \cos(a)$$
$$sen(b) = \frac{PB}{1} \rightarrow PB = sen(b)$$
$$\cos(b) = \frac{OB}{1} \rightarrow OB = \cos(b)$$

Y ya sin dificultad se concluye que:

$$sen(a+b) = sen(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot sen(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - sen(a) \cdot sen(b)$$

Y para la tangente:

$$tg(a+b) = \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a) \cdot tg(b)}$$

$$tg(a+b) = \frac{sen(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{sen(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot sen(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b) - sen(a) \cdot sen(b)} \underset{\substack{\text{dividiendo} \\ \text{num y den por} \\ \cos(a)\cos(b)}}{=} \frac{\dfrac{sen(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot sen(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}}{\dfrac{\cos(a) \cdot \cos(b) - sen(a) \cdot sen(b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}} =$$

$$= \frac{tg(a) + tg(b)}{1 - tg(a) \cdot tg(b)}$$

5.7.2 – Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos.

En este apartado nos planteamos obtener las razones trigonométricas de la resta de dos ángulos ($a - b$) en función de a y b. La demostración en este caso es mucho más sencilla que en el sub-apartado anterior, pues simplemente vamos a usar el resultado de la suma, sumando un ángulo negativo ($-b$). Para la demostración utilizaremos la relación entre un ángulo del cuarto cuadrante ($-b = 360 - b$) en función del ángulo b en el primero. Recordemos esta relación vista en un apartado anterior:

- $sen(-b) = sen(360 - b) = -sen(b)$
- $cos(-b) = cos(360 - b) = cos(b)$
- $tg(-b) = tg(360 - b) = -tg(b)$

Aplicamos estos resultados a las razones trigonométricas de la suma visto anteriormente:

$$sen(a-b) = sen(a + (-b)) = sen(a)\cdot cos(-b) + cos(a)\cdot sen(-b) = sen(a)\cdot cos(b) - cos(a)\cdot sen(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a + (-b)) = cos(a)\cdot cos(-b) + sen(a)\cdot sen(-b) = cos(a)\cdot cos(b) + sen(a)\cdot sen(b)$$

$$tg(a-b) = tg(a + (-b)) = \frac{tg(a) + tg(-b)}{1 - tg(a)\cdot tg(-b)} = \frac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a)\cdot tg(b)}$$

$$sen(a-b) = sen(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot sen(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cdot\cos(b) + sen(a)\cdot sen(b)$$
$$tg(a-b) = \frac{tg(a) - tg(b)}{1 + tg(a)\cdot tg(b)}$$

5.7.3 – Razones trigonométricas del ángulo doble.

En este apartado buscamos expresar las razones trigonométricas del ángulo doble, $2a$, en función del ángulo a.

Para calcularlo utilizamos las razones trigonométricas de la suma:

$$sen(2a) = sen(a + a) = sen(a)\cdot\cos(a) + \cos(a)\cdot sen(a) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos(a)\cdot\cos(a) - sen(a)\cdot sen(a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$

$$tg(2a) = \frac{tg(a) + tg(a)}{1 - tg(a)\cdot tg(a)} = \frac{2\cdot tg(a)}{1 - tg^2(a)}$$

$$sen(2a) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(a)$$
$$\cos(2a) = \cos^2(a) - sen^2(a)$$
$$tg(2a) = \frac{2\cdot tg(a)}{1 - tg^2(a)}$$

5.7.4 – Razones trigonométricas del ángulo mitad.

Como has visto en los dos anteriores sub-apartados podemos calcular las razones de las resta y del ángulo doble a partir de las razones trigonométricas de la suma. Para nuestro propósito de calcular las razones trigonométricas de los ángulos mitad utilizaremos las fórmulas del ángulo doble y de la relación fundamental de la trigonometría. Vamos a ello:

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x) \rightarrow sen(x) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x) = \cos^2(x) - \left(1 - \cos^2(x)\right) = 2\cos^2(x) - 1 \rightarrow \cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}}$$

Llamando $2x = a$, y por tanto $x = a/2$ tendremos los resultados que resumimos en el siguiente cuadro

$$sen\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}$$
$$\cos\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}$$
$$tg\left(\frac{a}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$$

5.7.4 – Tranformación de sumas de razones trigonométricas en productos.

En este apartado vamos a ver como trasformar la suma o diferencia de dos razones trigonométricas en un producto de razones trigonométricas. La utilidad de esto es más grande del que a simple vista parece, de hecho lo utilizaremos bastante en el apartado siguiente de resolución de ecuaciones trigonométricas.

Vamos a demostrar, como en los anteriores sub-apartados, las identidades que nos relacionan la suma de dos razones trigonométricas en el producto de otras dos razones. Para este objetivo partimos de las ya conocidas razones trigonométricas del seno y coseno de la suma y diferencia:

$$(1)\ \ sen(a+b) = sen(a)\cdot\cos(b) + \cos(a)\cdot sen(b)$$
$$(2)\ \ sen(a-b) = sen(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot sen(b)$$

(1) + (2) → $sen(a+b) + sen(a-b) = 2\cdot sen(a)\cdot\cos(b)$

(1) – (2) → $sen(a+b) - sen(a-b) = 2\cdot\cos(a)\cdot sen(b)$

Como el objetivo es que sean los argumentos de las razones trigonométricas sumadas conocidos se realiza el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} a+b=A \\ a-b=B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{A+B}{2} \\ b=\dfrac{A-B}{2} \end{cases}$$

De esta forma:

$$sen(A) + sen(B) = 2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$sen(A) - sen(B) = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Vamos a obtener la suma y diferencia de cosenos:

$$(1)\ \ \cos(a+b) = \cos(a)\cdot\cos(b) - sen(a)\cdot sen(b)$$
$$(2)\ \ \cos(a-b) = \cos s(a)\cdot\cos(b) + sen(a)\cdot sen(b)$$

(1) + (2) → $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cdot\cos(a)\cdot\cos(b)$

(1) – (2) → $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\cdot sen(a)\cdot sen(b)$

Haciendo el cambio de variable:

$$\cos(A) + \cos(B) = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos(A) - \cos(B) = -2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Resumiendo:

$$sen(A) + sen(B) = 2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \cos(A) + \cos(B) = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$sen(A) - sen(B) = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad \cos(A) - \cos(B) = -2\cdot sen\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

5.8. – Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo rectángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

RELACIÓN ENTRE LOS LADOS . TEOREMA DE PITÁGORAS

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

RELACIÓN ENTRE LOS ÁNGULOS

Los ángulos de un triángulo suman 180º: $A + B + C = 180º \Rightarrow B + C = 90º$

RELACIÓN ENTRE LADOS Y ÁNGULOS

$\text{sen } B = \frac{b}{a} = \cos C \qquad \cos B = \frac{c}{a} = \text{sen } C \qquad \text{tag } B = \frac{b}{c} = \text{ctg } C$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

CASO I : Conocidos dos lados: El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. El ángulo que forman dos lados conocidos se halla a partir de la razón trigonométrica que los relaciona.

CASO II : Conocidos un lado y un ángulo: Otro lado se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos. El otro ángulo agudo es el complementario del que conocemos. El otro lado aplicando el teorema de Pitágoras.

ALGUNOS RESULTADOS ÚTILES

Proyección de un segmento: $\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB.\cos\alpha \Rightarrow A'B' = AB.\cos\alpha$

La longitud de la proyección de un segmento sobre una recta es igual al producto de la longitud del segmento por el coseno del ángulo que forman.

Altura de un triángulo: $\text{sen } \alpha = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a.\text{sen}\alpha$

La altura de un triángulo es igual al producto de uno de sus lados laterales por el seno del ángulo que dicho lado forma con la base.

Área de un triángulo: $\text{Área} = \frac{b.h}{2} = \frac{b.a.\text{sen}\,\alpha}{2} = \frac{1}{2}a.b.\text{sen}\,\alpha$

El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.

APLICACIÓN A TRIÁNGULOS NO RECTÁNGULOS. ESTRATEGIA DE LA ALTURA.

Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto, aplicando los métodos de resolución de los triángulos rectángulos, mediante la estrategia de la altura. Consiste en elegir adecuadamente una de sus alturas de modo que, al trazarla, se obtengan dos triángulos rectángulos resolubles con los datos que se tienen.

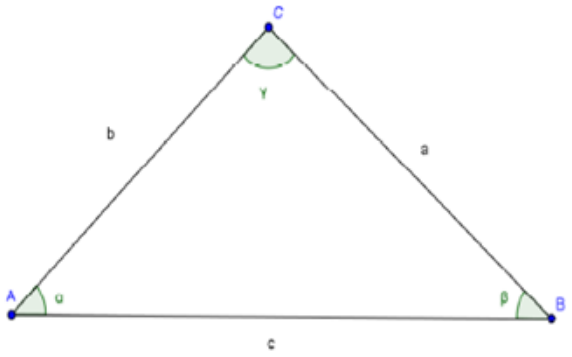
5.9. – Resolución de triángulos cualesquiera.

En este apartado, nos ocuparemos de un problema muy concreto, la resolución de triángulos. Resolver un triángulo es calcular todos sus lados y sus ángulos.

Por comodidad, vamos a representar los triángulos siempre de la misma manera, como ya habíamos visto en el apartado 1.2 para ángulos agudos. Para mayor comodidad lo vamos a repetir aquí.

1. Los vértices se representarán con letras mayúsculas, A, B, C ...
2. El lado opuesto a un vértice se representará con la letra minúscula correspondiente a, b, c ...
3. El ángulo correspondiente a un vértice se representará con la letra griega (minúscula) correspondiente. Pondremos α (alfa) para el vértice A, β (beta) para el vértice B y γ (gamma) para el vértice C. No utilizaremos más letras griegas, si necesitáramos representar más ángulos usaremos primas como en α' (alfa prima) o α'' (alfa segunda).

Puedes ver a continuación un esquema.



5.9.1. – Teorema del coseno.

El teorema del coseno a veces recibe el nombre de *Teorema de Pitágoras Generalizado*, que es una descripción más exacta. Es esencialmente el teorema de *Pitágoras* para triángulos no rectángulos (y además incluye como caso especial los triángulos rectángulos).

Su enunciado es sencillo:

Teorema del coseno

Si a, b y c son los lados de un triángulo cualquiera y α es el ángulo entre b y c se cumple la igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

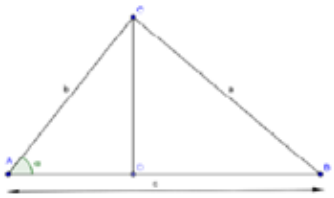
Notas

- Cuando el triángulo es rectángulo y a es la hipotenusa entonces $\alpha = 90°$. Si sustituimos en la fórmula tenemos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90$. Pero al ser $\cos 90 = 0$ la fórmula se reduce al **teorema de Pitágoras** $a^2 = b^2 + c^2$. Todos los problemas que se resuelven con el teorema de Pitágoras se resuelven con el teorema del coseno (pero, obviamente, no al revés).
- El teorema del coseno vale para CUALQUIER ángulo α, no es necesario que sea agudo. Por ejemplo puede ser $\alpha = 110°$, lo único que el coseno sería negativo. Pero la fórmula es la misma.
- Podemos utilizar el teorema de los cosenos si en un triángulo conocemos:
  - Los tres lados.
  - Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
  - Dos lados y el ángulo que forman.

Demostración del teorema

Vamos a hacerlo para un triángulo acutángulo. Dejaremos como ejercicio el caso obtusángulo (el rectángulo lo suponemos conocido, es el *Teorema de Pitágoras*).

Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Esta altura puede caer sobre el lado AB o fuera de él. Vamos a considerar el primer caso, el segundo quedará como ejercicio.



Queremos calcular el lado $a = BC$. Por el teorema de *Pitágoras* es $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2$. El problema es que no tenemos ni CD ni DB. Lo que sí tenemos es $b = AC$, $c = AB$ y el ángulo α.

Sabemos que $sen\,(\alpha) = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC\,sen(\alpha)$.

Sabemos también $\cos(\alpha) = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC\cos(\alpha)$.

Pero, por construcción $AD + DB = AB$ y AB sí lo tenemos. Luego es $DB = AB - AD$.

Recapitulando y escribiendo en función de a, b y c que son los datos originales:

$$CD = AC\,sen(\alpha) \Rightarrow CD = b\,sen(\alpha)$$

$$DB = AB - AD = c - AC\cos(\alpha) = c - b\cos(\alpha)$$

Finalmente $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2 = [b\,sen(\alpha)]^2 + [c - b\cos(\alpha)]^2$. Basta operar un poco:

$$a^2 = [b\,sen(\alpha)]^2 + [c - b\cos(\alpha)]^2 = b^2 sen^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 sen^2(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) = b^2[sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)] + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

Pero $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ con lo que finalmente tenemos el resultado deseado.

5.9.2. – Teorema del seno.

Teorema del seno:

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

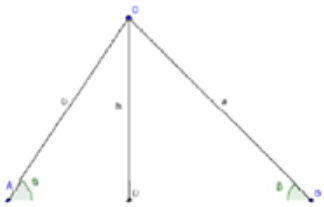
Notas

- Como antes el teorema del seno vale para CUALQUIER ángulo α, no es necesario que sea agudo. En este caso además el seno es siempre positivo pues los lados de un triángulo suman 180 grados. Y obviamente ningún ángulo puede ser 0 o 180, porque nos quedamos sin triángulo.
- El teorema del seno es preferible al del coseno si conocemos:
  a) Dos ángulos (es decir, tres ángulos) y un lado.
  b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Demostración del teorema

Como antes, vamos a hacerlo para un triángulo acutángulo y dejaremos como ejercicio los otros casos, el caso obtusángulo (el rectángulo lo suponemos conocido, es el Teorema de *Pitágoras*).

Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Esta altura puede caer sobre el lado AB o fuera de él. Vamos a considerar el primer caso, el segundo quedará como ejercicio.



Por definición de seno, tenemos $sen(\alpha) = \dfrac{h}{b}$ y también $sen(\beta) = \dfrac{h}{a}$. De este modo, despejando h en los dos lados e igualando $b\,sen(\alpha) = h = a\,sen(\beta)$.

En otras palabras $b\,sen(\alpha) = a\,sen(\beta) \Rightarrow \dfrac{a}{sen(\alpha)} = \dfrac{b}{sen(\beta)}$.

Con el mismo razonamiento para el ángulo γ correspondiente al vértice C se tiene la otra igualdad.

Al igual que en el teorema anterior, en las actividades propuestas veremos el otro caso.

Problemas con el teorema del seno. Las soluciones obtusa y aguda

Si sabemos que un ángulo α está entre 0º y 180º y conocemos su coseno, el ángulo está determinado. Eso significa que, con el teorema del coseno, siempre podemos calcular ángulos de un triángulo sin ambigüedad.

Pero no ocurre lo mismo con el teorema del seno. Dado el seno de un ángulo, hay dos ángulos entre 0º y 180º cuyo seno coincida. En efecto, $sen(30) = sen(150)$, $sen(40) = sen(140)$ y en general $sen(\alpha) = sen(180 - \alpha)$. Sólo lo tenemos identificado cuando $sen(\alpha) = 1$ que da únicamente $\alpha = 90°$.

Por eso, si utilizamos el teorema del seno para calcular ángulos, hay dos soluciones, la solución aguda y la solución obtusa. En algunas ocasiones esto está bien porque hay dos triángulos posibles pero en otras simplemente estamos introduciendo soluciones falsas.

¿Cómo arreglar este problema? Hay dos maneras. La más fácil es no utilizar nunca el teorema del seno para calcular ángulos, sino sólo lados.

La otra manera es utilizarlo para el cálculo de ángulos PERO ASEGURÁNDONOS DE QUE EL ÁNGULO ES AGUDO, ¿y cómo saber esto? Pues con el siguiente resultado.

Si un triángulo es obtusángulo, el ángulo obtuso es opuesto al lado más grande.

5.9.3. – Método general de resolución de triángulos.

Con las herramientas de que disponemos, ya podemos solucionar el problema general de la trigonometría, es decir, resolver triángulos cualesquiera.

Un triángulo tiene seis datos. Para resolverlo necesitamos tres de ellos y al menos uno de ello debe ser un lado.

Herramientas fundamentales

- ✓ Teorema del seno
- ✓ Teorema del coseno
- ✓ La suma de los ángulos del triángulo es 180º

Para evitar que los errores se propaguen es recomendable utilizar los datos que nos dan inicialmente, y no los que hemos ido calculando.

No siempre un triángulo se puede resolver pues con los datos dados nos pueden aparecer soluciones imposibles. También a veces con los datos dados tendremos dos soluciones. El caso más problemático es cuando se conocen dos lados y uno de los ángulos que no formen los dos lados.

Vamos a continuación a describir la situación con todo el detalle en todos los casos.

5.9.3.1. Conocidos los tres lados

Puede ocurrir:

- Una única solución
- Ninguna solución: esto ocurre cuando un lado es mayor o igual que la suma de los otros dos, o menor o igual que la resta de los otros dos.

Método recomendado para tres lados

- ✓ Si a es el lado mayor, calcular α (el ángulo opuesto) planteando el teorema del coseno en la forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$. Si sale $\cos\alpha \geq 1$ o $\cos\alpha \leq 1$ es que no hay solución.
- ✓ Calcular cualquiera de los otros dos ángulos con el teorema del seno.
- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º.

5.9.3.2. Conocido dos lados y el ángulo que forman

En este caso SIEMPRE hay una única solución. El método es simple.

Método recomendado para dos lados y el ángulo que forman

- ✓ Calcular el otro lado con el teorema del coseno.
- ✓ Usar el teorema del seno para calcular un ángulo. Hay dos posibilidades, tenemos que escoger siempre la que corresponda al lado MENOR. De este modo evitamos la solución obtusa.
- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º.

5.9.3.3. Conocidos dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos

Método recomendado para dos lados y un ángulo que no esté entre ellos

- ✓ Plantear el teorema del coseno. Nos aparecerá una ecuación de segundo grado.

  a) Si no tiene solución hemos terminado. No hay tal triángulo.

  b) Si tiene solución única procedemos con los siguientes pasos.

  c) Si tiene dos soluciones procedemos con los siguientes pasos para cada una de ellas. Son dos triángulos.

- ✓ Usar el teorema del seno para calcular un ángulo. Hay dos posibilidades, tenemos que escoger siempre la que corresponda al lado MENOR. De este modo evitamos la solución obtusa.

Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º

5.9.3.4. Conocido un lado y dos ángulos.

En este caso pueden ocurrir son cosas:

1. Ninguna solución (si los dos ángulos suman 180 grados o más).
2. Una única solución.

Este caso es especialmente sencillo.

Método recomendado para dos ángulos y un lado

- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º. Si los dos ángulos que nos dan suman 180 grados o más no hay solución.
- ✓ Usar el teorema del seno para calcular los otros lados.

5.10. – Ecuaciones trigonométricas.

Se conocen como ecuaciones trigonométricas aquellas que contienen razones trigonométricas de ángulos desconocidos. Por ejemplo, en sen x = 0 buscamos ángulos que tengan seno cero. Una solución particular es un valor del ángulo que satisface la ecuación. Así, dos soluciones particulares de la ecuaci ón anterior son $x_1 = 0$ y $x_2 = \pi$. Ahora bien, cuando una ecuación dada tiene una solución, tendrá, en general, un conjunto infinito de soluciones. En el ejemplo anterior, el conjunto de soluciones o solución general viene dado por:

$$x_1 = 0 + 2k\pi,\ x_2 = \pi + 2k\pi,\ k \in Z$$

Al resolverlas, tendremos en cuenta que a cada ángulo le corresponde un valor único para cada razón trigonométrica, sin embargo, puede haber infinitos ángulos con la misma razón. Será de gran utilidad recordar que, en el primer giro:

Tienen el mismo seno α y π – α , ya que sen(π – α) = sen α,

Tienen el mismo coseno α y 2 π – α ya que cos(2π – α) = cos α

Tienen la misma tangente α y π +α pues tg (π + α) = tg α

Para resolver una ecuación trigonométrica, en primer lugar, la reduciremos a una de los tipos seno, coseno o tangente, y seguiremos las instrucciones que se recogen en la siguiente tabla:

	TIPO SENO	TIPO COSENO	TIPO TANGENTE
Ecuación	$\operatorname{sen} x = a$	$\cos x = a$	$\operatorname{tg} x = a$
Solución particular	$\alpha\ rad$	$\alpha\ rad$	$\alpha\ rad$
Solución general	$x_1 = \alpha + 2k\pi$ $x_2 = \pi - \alpha + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x_1 = \alpha + 2k\pi$ $x_2 = 2\pi - \alpha + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x_1 = \alpha + 2k\pi$ $x_2 = \pi + \alpha + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Podemos poner algunas pautas para resolver las ecuaciones, pero no hay ninguna "receta mágica" que permita resolverlas de forma mecánica como las ecuaciones de segundo grado. Sólo repetir y hacer bastantes ecuaciones te va a facilitar resolver otras. Permítenos que te demos esas **pautas** que antes describíamos:

I. Para resolver una ecuación los ***argumentos*** de las razones trigonométricas (lo que está dentro de los paréntesis del *sen*, *cos*, *tg*...) han de ser ***iguales***. De esta forma si tenemos en algunos x en otros $2x$, por ejemplo podemos transformarlos en x con el ángulo doble

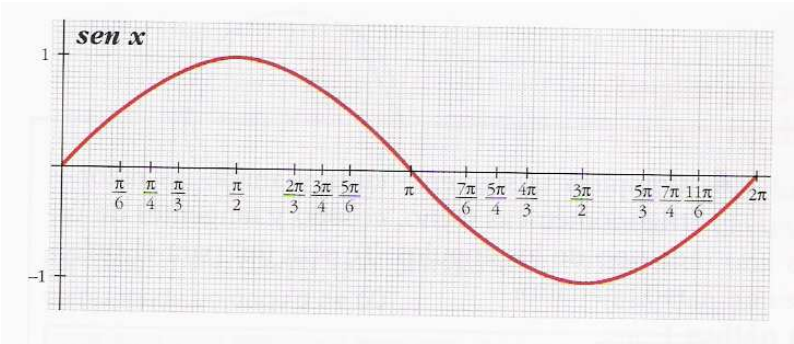
II. Si tenemos ***sumas o resta de dos razones trigonométricas*** (seno o coseno) igualadas a cero, podemos transformarlas en producto y así luego separar la ecuación en dos igualdades elementales.

III. Si tenemos varias razones trigonométricas con mismo argumento mediante las igualdades trigonométricas, $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$, $1 + tg^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ o $tg(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$ podremos poner todas las razones en ***función de una única razón trigonométrica*** y mediante un cambio de variable resolver la ecuación.

5.11. – Funciones trigonométricas.

FUNCIÓN SENO

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
seno	0	1/2	2/2	3/2	1	3/2	2/2	1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	-1	-3/2	-2/2	-1/2	0

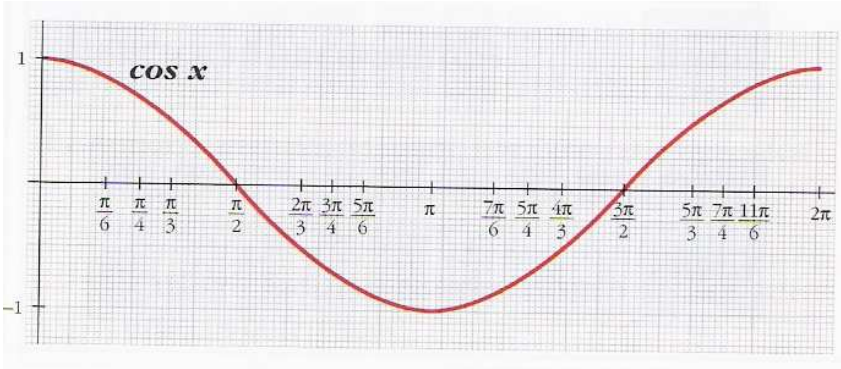


CARACTERÍSTICAS

- Dominio : R
- Recorrido : [-1,1]
- Periodicidad : 2π
- Continua
- Creciente (0º+360ºk,90º+360ºk) ∪ (270º+360ºk,360º+360ºk)
- Decreciente (90º+360ºk,270º+360ºk)
- Máximo x = 90º+360ºk y = 1
- Mínimo x = 270º+360ºk y = -1
- Concava: (0º+360ºk,180º+360ºk)
- Convexa: (180º+360ºk,360º+360ºk)
- Puntos de inflexión x = 0º+180ºk y = 0

FUNCIÓN COSENO

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
cos	1	3/2	2/2	1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	-1	-3/2	-2/2	-1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	1

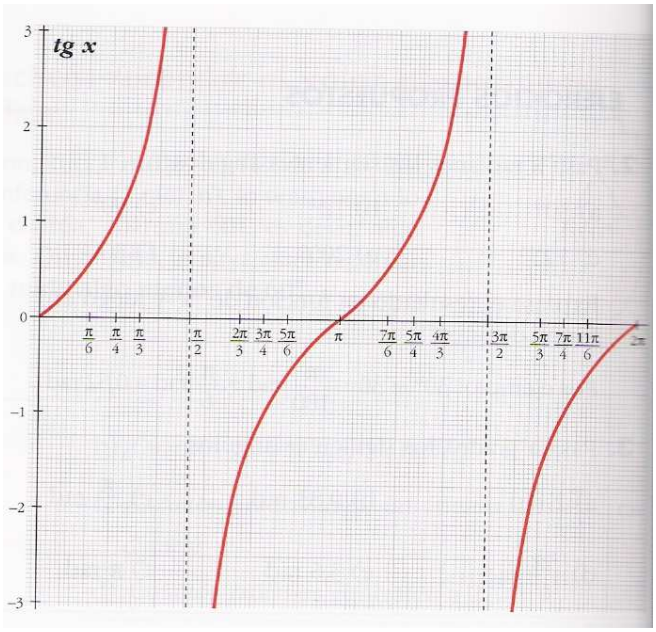


CARACTERÍSTICAS

- Dominio : R
- Recorrido : [-1,1]
- Periodicidad : 2π
- Continua
- Creciente (180º+360ºk,360º+360ºk)
- Decreciente (0º+360ºk,180º+360ºk)
- Máximo x = 0º+360ºk y = 1
- Mínimo x = 180º+360ºk y = -1
- Concava: (0º+360ºk,90º+360ºk) ∪ (270º+360ºk,360º+360ºk)
- Convexa: (90º+360ºk,270º+360ºk)
- Puntos de inflexión x = 90º+180ºk y = 0

FUNCIÓN TANGENTE

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
Tag	0	3/3	1	3		-3	-1	-3/3	0	3/3	1	3		-3	-1	-3/3	0



CARACTERÍSTICAS

- Dominio : R – {90º+180ºk}
- Recorrido : R
- Periodicidad : π
- Continua: R – {90º+180ºk}
- Creciente R – {90º+180ºk}
- Concava: (0º+180ºk,90º+180ºk)
- Convexa: (90º+180ºk,180º+180ºk)
- Puntos de inflexión x = 90º+180ºk y = 0

5.12. – Razones trigonométricas con calculadora.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS CON CALCULADORA

Obtener las razones trigonométricas de un ángulo

Las calculadoras científicas tienen las teclas “sin”, “cos”, “tan”, correspondiente a las razones trigonométricas sen, cos y tag. Si el ángulo viene dado en grados, la calculadora tiene que estar en modo “DEG”

Pasar de grados, minutos y segundos a grados y viceversa

La tecla “º’’’” permite introducir en la calculadora un ángulo dado en grados, minutos y segundos. La calculadora nos da, automáticamente, una expresión decimal de la medida del ángulo (en grados).

Para pasar de una expresión decimal de grados a grados, minutos y segundos, se utiliza la secuencia “INV” “º’’’” (“INV” = “SHIFT”)

Cálculo de un ángulo conocida una razón trigonométrica

Para hallar el ángulo cuyo seno es un cierto número, se utiliza la tecla “sen^{-1}” (arcoseno) que suele corresponder a la secuencia “INV” “SIN”. Análogamente para coseno y tangente.

Cálculo de una razón trigonométrica conociendo otra

Combinando las aplicaciones anteriores, se puede obtener una razón trigonométrica de un ángulo del cual solo se conoce otra razón trigonométrica.

5.9.3. – Método general de resolución de triángulos.

Con las herramientas de que disponemos, ya podemos solucionar el problema general de la trigonometría, es decir, resolver triángulos cualesquiera.

Un triángulo tiene seis datos. Para resolverlo necesitamos tres de ellos y al menos uno de ello debe ser un lado.

Herramientas fundamentales

- ✓ Teorema del seno
- ✓ Teorema del coseno
- ✓ La suma de los ángulos del triángulo es 180º

Para evitar que los errores se propaguen es recomendable utilizar los datos que nos dan inicialmente, y no los que hemos ido calculando.

No siempre un triángulo se puede resolver pues con los datos dados nos pueden aparecer soluciones imposibles. También a veces con los datos dados tendremos dos soluciones. El caso más problemático es cuando se conocen dos lados y uno de los ángulos que no formen los dos lados.

Vamos a continuación a describir la situación con todo el detalle en todos los casos.

5.9.3.1. Conocidos tres lados

Puede ocurrir:

- Una única solución
- Ninguna solución: esto ocurre cuando un lado es mayor o igual que la suma de los otros dos, o menor o igual que la resta de los otros dos.

Método recomendado para tres lados

- ✓ Si a es el lado mayor, calcular α (el ángulo opuesto) planteando el teorema del coseno en la forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$. Si sale $\cos\alpha \geq 1$ o $\cos\alpha \leq 1$ es que no hay solución.
- ✓ Calcular cualquiera de los otros dos ángulos con el teorema del seno.
- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º.