- Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de monomios, que son los **términos** del polinomio.
- Un polinomio es **reducido** cuando no tiene monomios semejantes.
- El **grado** de un polinomio reducido coincide con el grado de su término de mayor grado.
- Un polinomio es **completo** cuando tiene términos de todos los grados inferiores al grado del polinomio. En caso contrario, es **incompleto**.

EJEMPLO

Dado el polinomio $P(x) = 5x^2 - 3x + 2x + 1 - 3$:

a) Obtén el polinomio reducido.

b) Determina el grado del polinomio.

c) ¿Cuántos términos tiene el polinomio? ¿Cuál es su término independiente?

d) ¿Es un polinomio completo? Si el polinomio es incompleto, di qué término falta.

a) Para reducir un polinomio hay que resolver las operaciones que se puedan:

$$P(x) = 5x^2 - \underbrace{3x + 2x} + \overbrace{1 - 3} = P(x) = 5x^2 - x - 2 \longrightarrow \text{Polinomio reducido}$$

b) El grado del polinomio es 2: $P(x) = 5x^{②} - x - 2$.

c) El polinomio tiene tres términos y -2 es el término independiente.

$$P(x) = 5x^2 - x - \boxed{2} \longrightarrow -2 \text{ es el término independiente.}$$

$\longrightarrow$ Tiene tres términos.

d) $P(x) = \underset{2}{5x^2} - \underset{1}{x} - \underset{0}{2}$ es un polinomio completo.
Grado

EJEMPLO

¿Es $Q(x) = 7x^3 + 2x^2 + 3$ un polinomio completo o incompleto?

$Q(x) = \underset{3}{7x^3} + \underset{2}{2x^2} + \underset{0}{3}$ Es un polinomio incompleto, pues no tiene término de grado 1.
Grado

1 **Calcula el polinomio reducido.**

a) $P(x) = 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1$

b) $P(x) = x^4 - 4 - 3x^2 + x - x^2 + 1 - 3x^4 - 3x$

2 **Calcula el polinomio reducido y ordena sus términos de mayor a menor grado.**

$P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 3x + 4x^4 - 3x + 2x^2 + 5$

$P(x) =$ _____

- Tiene ..... términos.
- El término independiente es .....
- El grado del polinomio es .....
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? .....

3 **Reduce el polinomio y ordena sus términos de mayor a menor grado.**

$P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3 + 5 - 7x + 3x^2 - 2x^3$

$P(x) =$ _____

- Tiene ..... términos.
- El término independiente es .....
- El grado del polinomio es .....
- ¿Cómo es el polinomio, completo o incompleto? .....

4 **Señala si los siguientes polinomios son completos o incompletos. Completa la tabla.**

POLINOMIO	COMPLETO	INCOMPLETO	FALTA EL TÉRMINO
$P(x) = -4x^2 + 5x - 2$			
$Q(x) = 2x^3 + 40$			
$R(x) = -10x^2 - 20x + 40$			
$S(x) = 40$			
$T(x) = x^3 + x^2 + 1$			

5 **Dado el polinomio $Q(x) = 2x^5 + x^2 - x$, indica.**

a) Si es o no ordenado.
b) Si es o no reducido.
c) Si es o no completo.
d) Su grado.
e) Su término independiente.

El **valor numérico** de un polinomio $P(x)$, para cierto valor de la variable $x = a$, se obtiene sustituyendo x por a y operando.

EJEMPLO

En un polinomio, por ejemplo, $P(x) = 2x^2 + 1$, se puede dar cualquier valor a la x.

Para $x = 2 \longrightarrow P(2) = 2 \cdot (2)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

El valor numérico del polinomio para $x = 2$ es 9.

Para $x = 10 \rightarrow P(10) = 2 \cdot (10)^2 + 1 = 2 \cdot 100 + 1 = 200 + 1 = 201$

El valor numérico del polinomio para $x = 10$ es 201.

1 **Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios para $x = 1$.**

a) $P(x) = x + 1$

$x = 1 \rightarrow P(\ \ ) = (\ \ ) + 1$

b) $P(x) = x^2 + 1$

c) $P(x) = x^3 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 1$

2 **Calcula el valor numérico de cada polinomio para el valor de la variable indicado.**

a) $A(x) = x + 1$, para $x = 1$.

b) $B(x) = 4x^5 - 6x^2 + 3$, para $x = -1$.

c) $C(x) = -9x^4 + 7x^2 + 5$, para $x = 1$.

d) $D(x) = x^3 + x^2 + x + 2$, para $x = -2$.

- La **suma** de dos polinomios se calcula sumando los términos semejantes de ambos.
- La **resta** de dos polinomios se obtiene sumando el primero con el polinomio opuesto del segundo.
- Recuerda que la regla básica de las sumas y restas de polinomios es que **solo se pueden sumar y restar los términos semejantes**.

EJEMPLO

Suma los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ y $Q(x) = 4x^2 - 3x + 2$.

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** solo se suman los elementos iguales.

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 \boxed{-2x^2} \boxed{+5x} \boxed{-3} \boxed{+4x^2} \boxed{-3x} \boxed{+2} = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

$$P(x) + Q(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1$$

- **En columna:** hay que poner en columna los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - 2x^2 + 5x - 3 \\ + Q(x) = & \ \ 4x^2 - 3x + 2 \\ \hline P(x) + Q(x) = & 3x^3 + 2x^2 + 2x - 1 \end{array}$$

EJEMPLO

Resta los siguientes polinomios: $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5$ y $Q(x) = 5x^2 - 2x + 7$.

Se puede realizar de dos maneras:

- **En línea:** el signo negativo delante del paréntesis afecta a todos los términos.

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5 - (5x^2 - 2x + 7) =$$

$$= 3x^3 \boxed{-5x^2} \boxed{+5} \boxed{-5x^2} + 2x \boxed{-7} = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

$$P(x) - Q(x) = 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2$$

- **En columna:** hay que poner en columna los términos semejantes.

$$\begin{array}{rl} P(x) = & 3x^3 - \ \ 5x^2 \qquad + 5 \\ - Q(x) = & - \ (5x^2 - 2x + 7) \\ \hline P(x) - Q(x) = & 3x^3 - 10x^2 + 2x - 2 \end{array}$$

1 **Dados los polinomios $P(x) = x^3 - 2x + 1$ y $Q(x) = x^2 - 3x + 2$, halla $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$, resolviendo las operaciones en línea y en columna.**

2 **Calcula la suma y resta de cada par de polinomios.**

a) $P(x) = 3x + 2x^2 - x - 4$ $\qquad$ $Q(x) = x^3 - x^2 - 9x + 3$

$P(x) =$ $\qquad$ $P(x) =$

$+\ Q(x) =$ $\qquad$ $-\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$ $\qquad$ $P(x) - Q(x) =$

b) $P(x) = x^7 - 8x^4 + 3$ $\qquad$ $Q(x) = x^5 + 3x^3 - 6$

$P(x) =$ $\qquad$ $P(x) =$

$+\ Q(x) =$ $\qquad$ $-\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$ $\qquad$ $P(x) - Q(x) =$

c) $P(x) = 10x^4 + x^2 + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^5 + 7x^2 - x$

$P(x) =$ $\qquad$ $P(x) =$

$+\ Q(x) =$ $\qquad$ $-\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$ $\qquad$ $P(x) - Q(x) =$

d) $P(x) = -x^4 - x^3 - 2$ $\qquad$ $Q(x) = -3x^4 - 2x^3 - x - 5$

$P(x) =$ $\qquad$ $P(x) =$

$+\ Q(x) =$ $\qquad$ $-\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$ $\qquad$ $P(x) - Q(x) =$

e) $P(x) = -3x^3 - 2x^2 - 2$ $\qquad$ $Q(x) = 6x^4 - x^3 - 3x + 7$

$P(x) =$ $\qquad$ $P(x) =$

$+\ Q(x) =$ $\qquad$ $-\ Q(x) =$

$P(x) + Q(x) =$ $\qquad$ $P(x) - Q(x) =$

- El **producto** de dos polinomios se halla multiplicando cada uno de los monomios de un polinomio por los monomios del otro, y sumando, después, los polinomios obtenidos en esas multiplicaciones.
- Para multiplicar dos polinomios es necesario aplicar la **propiedad distributiva**.

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$.

Vamos a resolverlo multiplicando en línea:

$$P(x) \cdot Q(x) = (7x^3 + 2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 + 3) =$$

Se multiplican todos los monomios de un polinomio por los monomios del otro polinomio.

$$= \boxed{7x^3 \cdot x^2 + 7x^3 \cdot 3}\ \boxed{+ 2x^2 \cdot x^2 + 2x^2 \cdot 3}\ \boxed{+ x \cdot x^2 + x \cdot 3}\ \boxed{- 7 \cdot x^2 - 7 \cdot 3}$$

$$= 7x^5 + 21x^3 + 2x^4 + 6x^2 + x^3 + 3x - 7x^2 - 21 =$$

$$= 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

Se suman los términos semejantes.

$$P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - x^2 + 3x - 21$$

1 **Multiplica los siguientes polinomios.**

a) $P(x) = 5x^2 - 7x + 3$ y $Q(x) = 2x^2 + 1$

$$P(x) \cdot Q(x) = (5x^2 - 7x + 3) \cdot (2x^2 + 1)$$

Multiplicamos los monomios.

$= \boxed{}\ \boxed{-\ }\ \boxed{+\ }$

$=$

Sumamos los términos semejantes.

$P(x) \cdot Q(x) =$

b) $P(x) = x^3 - 1$ y $Q(x) = 5x^2 - x + 2$

EJEMPLO

Multiplica los siguientes polinomios: $P(x) = 7x^3 + 2x^2 + x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 3$.

Resolvemos el ejercicio multiplicando en columna:

$$
\begin{array}{rl}
 & 7x^3 + 2x^2 + x - 7 \\
\times & x^2 + 3 \\
\hline
 & 21x^3 + 6x^2 + 3x - 21 \\
7x^5 + 2x^4 + & x^3 - 7x^2 \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = 7x^5 + 2x^4 + 22x^3 - & x^2 + 3x - 21
\end{array}
$$

← *Producto de 3 por $7x^3 + 2x^2 + x - 7$*

← *Producto de x^2 por $7x^3 + 2x^2 + x - 7$*

← *Suma de monomios semejantes*

2 **Multiplica los polinomios: $P(x) = 5x^2 - 3x + 4$ y $Q(x) = 3x + 2$.**

$$
\begin{array}{rl}
 & 5x^2 - 3x + 4 \\
\times & 3x + 2 \\
\hline
 & \\
 & \\
\hline
P(x) \cdot Q(x) = & \boxed{}
\end{array}
$$

← *Producto de 2 por $5x^2 - 3x + 4$*

← *Producto de 3x por $5x^2 - 3x + 4$*

← *Suma de monomios semejantes*

3 **Calcula el producto del polinomio $R(x) = x^3 - 1$ y el monomio $S(x) = x + 3$, utilizando la propiedad distributiva.**

4 **Halla el producto de los siguientes polinomios.**

a) $R(x) = x^3 - 1$ y $S(x) = x$

b) $R(x) = x^4 - x + 1$ y $S(x) = x^2 + 1$

- Lo primero que hay que tener en cuenta para dividir los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ es que el grado del polinomio $P(x)$ debe ser mayor o igual que el del polinomio $Q(x)$.
- En estas condiciones, dados dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, existen otros dos polinomios $C(x)$ y $R(x)$ que cumplen:

  $\boldsymbol{P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)}$

  $\boldsymbol{P(x)}$ es el polinomio **dividendo**.

  $\boldsymbol{Q(x)}$ es el polinomio **divisor**.

  $\boldsymbol{C(x)}$ es el polinomio **cociente**.

  $\boldsymbol{R(x)}$ es el polinomio **resto**.
- Si el resto de la división es nulo, es decir, si $R(x) = 0$:
  - La **división** es **exacta**.
  - El polinomio **$P(x)$ es divisible por $Q(x)$**.
- En caso contrario, se dice que la división no es exacta.

EJEMPLO

Divide los siguientes polinomios: $P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$ y $Q(x) = x^2 + 5$.

$$
\begin{array}{l|l}
5x^3 + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\
\hline
 & \bigcirc
\end{array}
$$

Hay que elegir un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $5x^3$:

$\bigcirc \cdot x^2 = 5x^3$. En este caso, $\bigcirc = 5x$.

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\
\hline
-\cancel{5x^3} \quad - 25x & 5x + 3 \\
\hline
3x^2 - 20x - 7 &
\end{array}
$$

Multiplicamos 5x por cada uno de los términos del polinomio cociente ($x^2 + 5$), cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna. A continuación, sumamos.

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{5x^3} + 3x^2 + 5x - 7 & x^2 + 5 \\
\hline
-\cancel{5x^3} \quad - 25x & 5x + 3 \\
\hline
\cancel{3x^2} - 20x - 7 & \\
-\cancel{3x^2} \quad - 15 & \\
\hline
- 20x - 22 &
\end{array}
$$

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé $3x^2$, en este caso 3.

Multiplicamos 3 por $x^2 + 5$, cambiamos de signo los resultados y los colocamos en su columna. A continuación, sumamos.

Hay que buscar un monomio que multiplicado por x^2 nos dé 20x, pero no existe ninguno. Por tanto, la división finaliza.

Polinomio dividendo:	$P(x) = 5x^3 + 3x^2 + 5x - 7$
Polinomio divisor:	$Q(x) = x^2 + 5$
Polinomio cociente:	$C(x) = 5x + 3$
Polinomio resto:	$R(x) = -20x - 22$

En este caso, la división no es exacta, ya que el resto obtenido es distinto de cero.

1 **Calcula las divisiones de polinomios y señala si son exactas o enteras.**

a) $P(x) = x - 1$, $Q(x) = x$

b) $P(x) = x^2 - 5x + 6$, $Q(x) = x - 2$

c) $P(x) = x^2 - 1$, $Q(x) = x + 1$

d) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = x$

2 **Haz las divisiones y comprueba que $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$.**

a) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x$

b) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x + 1$

c) $P(x) = x^3 - 1$, $Q(x) = x^2 - 2$

d) $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = x^3$

CUADRADO DE UNA SUMA

- El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$(x + 3)^2 = (x + 3) \cdot (x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$

$(4x + y)^2 = (4x + y) \cdot (4x + y) = 16x^2 + 4xy + 4xy + y^2 = 16x^2 + 8xy + y^2$

1 **Desarrolla estas igualdades.**

a) $(x + 2y)^2 = (x + 2y) \cdot (x + 2y) =$

b) $(3x^3 + 3)^2 =$

c) $(2x + 3y)^2 =$

d) $(4a + b^2)^2 =$

CUADRADO DE UNA DIFERENCIA

- El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - a \cdot b - a \cdot b + b \cdot b = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLO

$(2y - 3)^2 = (2y - 3) \cdot (2y - 3) = 4y^2 - 6y - 6y + 9 = 4y^2 - 12y + 9$

$(x^2 - 2) = (x^2 - 2) \cdot (x^2 - 2) = x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 4 = x^4 - 4x^2 + 4$

2 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(6x - 4y)^2 = (6x - 4y) \cdot (6x - 4y) =$

b) $(5x^4 - 2)^2 =$

c) $(2x - 3y)^2 =$

d) $(4x^3 - a^2)^2 =$

PRODUCTO DE UNA SUMA POR UNA DIFERENCIA

- El producto de una suma por una diferencia es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

- Esto se puede hacer como una multiplicación normal:

$$(a + b)^2 \cdot (a - b) = a \cdot a - \cancel{a \cdot b} + \cancel{a \cdot b} + b \cdot b = a^2 - b^2$$

EJEMPLO

$(3x + 2) \cdot (3x - 2) = 9x^2 - 6x + 6x - 4 = 9x^2 - 4$

$(5x - 3y) \cdot (5x + 3y) = 25x^2 + 15xy - 15xy - 9y^2 = 25x^2 - 9y^2$

3 **Desarrolla las siguientes igualdades.**

a) $(7x + x^4) \cdot (7x - x^4) =$

b) $(y + x^2) \cdot (y - x^2) =$

c) $(x + x^3) \cdot (x - x^3) =$

d) $(a^4 - b) \cdot (a^4 + b) =$

4 **Desarrolla.**

a) $(x + 5)^2 =$

b) $(2y - 7)^2 =$

c) $(3xy + 2yz) \cdot (3xy - 2yz) =$

d) $(abc + 1)^2 =$

e) $(7 - 3x)^2 =$

f) $(9v + 2z) \cdot (9v - 2z) =$

g) $(3xy + x^3)^2 =$

5 **Desarrolla las igualdades.**

a) $(4x + 2)^2 - (5x + 1) \cdot (2x - 3) =$

b) $(x + 3)^2 - (x - 2)^2 =$