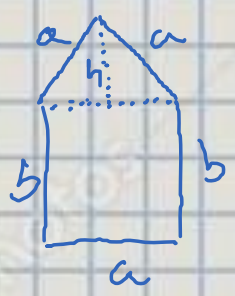
Jueves 29 de noviembre de 2017

Ejercicio 1. Problema de optimización.

Se considera una ventana rectangular en la que el lado de arriba se ha sustituido por un triángulo equilátero. Calcula la longitud de sus lados sabiendo que su perímetro es 6,6m, de forma que el área que encierra sea máxima.



Relación con el perímetro

$$3a + 2b = 6'6 \; ; \; \boxed{b = 3'3 - 1'5a}$$

Función a maximizar

$$A(a,b) = a \cdot b + \frac{a \cdot h}{2} = ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$A(a) = 3'3a - 1'5a^2 + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Para encontrar el máximo hacemos $A'(a) = 0$

$$A'(a) = 3'3 - 3a + \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$A'(a) = \frac{3'3 - 6a + a\sqrt{3}}{2} \; ; \; 3'3 - 6a + a\sqrt{3} = 0$$

$$a = \frac{3'3}{6 - \sqrt{3}}$$

$$A''(a) = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow A''\left(\frac{3'3}{6-\sqrt{3}}\right) < 0$$

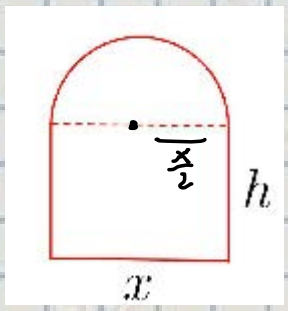
$\Rightarrow$ A en $a = \frac{3'3}{6-\sqrt{3}}$ alcanza un máximo

Si $a = \frac{3'3}{6-\sqrt{3}} \Rightarrow b = 3'3 - \frac{9'9}{12 - 2\sqrt{3}}$

Jueves 25 de enero de 2018.

Ejercicio 21. **Problema de optimización.**

Se quiere hacer una puerta rectangular, coronada por un semicírculo como en la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 m^2. Si es posible determina la base x para que el perímetro sea mínimo.



Variables x y h

Relación $\Rightarrow$ hueco de la puerta 16 m^2

El hueco de la puerta está formado por un rectángulo y una semicircunferencia de radio $x/2$

Área del hueco de la puerta $= A$; $A = x \cdot h + \frac{\pi x^2}{8}$

$\Rightarrow 16 = \frac{8xh + \pi x^2}{8}$; $128 = 8xh + \pi x^2$; $h = \frac{128 - \pi x^2}{8x}$;

Ahora veamos la función objetivo, que es la función que me da el perímetro:

$P(x,h) = x + 2h + \pi \cdot \frac{x}{2}$; $P(x) = x + \frac{128 - \pi x^2}{4x} + \frac{\pi x}{2}$

$$P(x) = \frac{4x^2 + 128 - \pi x^2 + 2\pi x^2}{4x} = \frac{(4+\pi)x^2 + 128}{4x}$$

Estudiemos el signo de $P'(x)$ para determinar los extremos relativos;

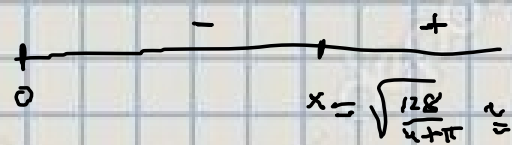
$$P'(x) = \frac{2(4+\pi)x \cdot 4x - 4[(4+\pi)x^2 + 128]}{16x^2}$$

$$P'(x) = \frac{4(4+\pi)x^2 - 512}{16x^2}$$

Como $x > 0$ signo $P'(x) =$ signo $(4(4+\pi)x^2 - 512)$

$4(4+\pi)x^2 - 512 = 0; \quad x^2 = \frac{512}{4(4+\pi)} = \frac{128}{4+\pi}$

signo P'



$x = +\sqrt{\frac{128}{4+\pi}} \simeq 4'23$

P decrece cuando $x \in (0, \sqrt{\frac{128}{4+\pi}})$ y crece cuando $x > \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$ $\Rightarrow$ que cuando $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$ se alcanza un mínimo

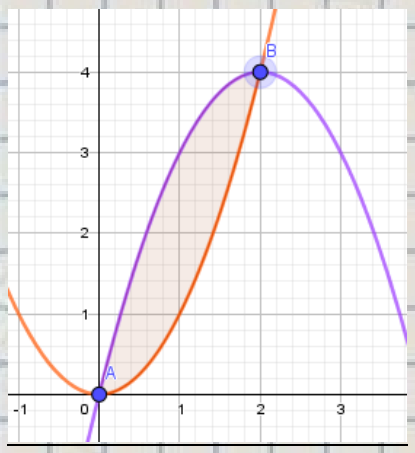
si $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$ $\quad h = \frac{128 - \pi \frac{128}{4+\pi}}{8\sqrt{\frac{128}{4+\pi}}} \simeq 2'12$

La base de la puerta mide $8\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$ y el lado recto $\frac{512}{8 \cdot \sqrt{2(4+\pi)}} = \frac{8}{\sqrt{2(4+\pi)}}$

<u>Ejercicio 22.</u> Área del recinto delimitado por varias funciones.

Considera la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) Esboza la gráfica de la región delimitada por ambas gráficas y determina los puntos de corte de las mismas.
b) Expresa el área como una integral.
c) Calcula el área.



Puntos de corte:

$x^2 = -x^2 + 4x$

$2x^2 - 4x = 0$

$x = 0$ y $x = 2$

$(0,0)$ y $(2,4)$ puntos de corte.

Área recinto $= \int_0^2 -x^2 + 4x - x^2 \, dx$

$A = \int_0^2 -2x^2 + 4x \, dx$

$A = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \; u^2$

Ejercicio 23. **Integral defina.**

Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ **sugerencia** $(t = \sqrt[4]{x})$

$t = \sqrt[4]{x}$; $dt = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ $\quad t^4 = x \quad \sqrt{x} = t^2$

$x^3 = t^{12}$

$dx = 4\sqrt[4]{x^3}\,dt$

$dx = 4\sqrt[4]{t^{12}}\,dt$

$dx = 4t^3\,dt$

Si $x = 1 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = 1 \Rightarrow t = 1$

Si $x = 16 \Rightarrow t = 2$

$$I = \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} \underset{t=\sqrt[4]{x}}{=} \int_1^2 \frac{4t^3}{t^2+t}\,dt \quad \text{Polinómica}$$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & t^2+t \\ \hline -t^3-t^2 & t-1 \\ \quad -t^2+t & \end{array}$$

$t^3 = (t^2+t)\cdot(t+1) - t$

$$I = 4\int_1^2 t-1\,dt + 4\int_1^2 \frac{t}{t^2+t}$$

$\frac{t}{t^2+t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t}$; $A+B=1$ y $B=0$

$$I = 4\int_1^2 t\,1\,dt + 4\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$4\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^2 + 4\left[\ln|t+1|\right]_1^2 = 4\left(0+\tfrac{1}{2}+\ln 3-\ln 2\right) =$$

$$= 2 + 4\ln\frac{3}{2} \simeq 3'62$$

Ejercicio 24. **Asíntotas y aplicaciones de la derivada.**

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **definida por** $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ $si\ x \neq 1$.

a) **Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.**
b) **Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f* y determina los extremos relativos de *f*. (abscisas dónde se obtienen y valores que se alcanzan).**

a) Candidatos a asíntotas verticales punto de discontinuidad, en este caso $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ Asíntota H.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Veamos ahora asíntotas del tipo $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y si } \exists m \to n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \text{ en } +\infty \text{ y } -\infty \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \text{ en } \pm\infty$$

$\rightarrow y = x + 1$ es una Asíntota O.

b) Se trata de estudiar el signo de f'

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \; ; \; f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Signo f': $+$ | 0 | $-$ | 1 | $-$ | 2 | $+$

f decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$
f creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$\Rightarrow (2, f(2))$ mínimo relativo $(2, 4)$
$(0, f(0))$ máximo relativo $\rightarrow (0, 0)$

Ejercicio 2. **Continuidad de funciones.**

Halla ***a*** y ***b*** sabiendo que es continua la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + \cos(x) + ae^x}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ b\ si\ x = 0 \end{cases}$$

El único punto a estudiar es $x=0$, en el resto f es continua por ser cociente de funciones continuas.

Pongamos las condiciones de continuidad para $x=0$ y luego comprobémoslas.

¿$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$?

Empezamos calculando $\lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x + \cos(x) + ae^x}{x^2} = \frac{0 + 1 + a}{0}$$

Para que f sea continua en $x=0$, a tiene que ser -1 en otro caso en $x=0$ habría una asíntota vertical

Visto que $a=-1$, volvemos a calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos(x) - e^x}{x^2} = \frac{0}{0} \quad \text{aplicamos R.L}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos(x) - e^x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \operatorname{sen}(x) - e^x}{2x} = \frac{0}{0} \quad \text{IND}$$

Volvemos a aplicar R.L.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + \cos(x) - e^x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos(x) - e^x}{2} = -1$$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = -1$ y f continua $\Rightarrow b = -1$

$a = -1$ y $b =$

<u>Ejercicio 3.</u> Recta tangente y normal.

Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

Determina los valores de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ sabiendo que la función tiene un punto de inflexión de abcisa $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}$ y que la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abcisa $\boldsymbol{x=0}$ tiene la ecuación $\boldsymbol{y = 5 - 6x}$

Si f tiene un punto de inflexión en $(1/2, f(1/2))$ tiene que ocurrir que $f''(1/2) = 0$.

La recta tg a la gráfica de f en el $(0, f(0))$ sabemos que es $y = f'(0) \cdot x + f(0)$ y el enunciado dice que es $y = 5 - 6x$. Entonces $f'(0) = -6$ y $f(0) = 5$;

$f(0) = c$ y $f(0) = 5 \Rightarrow c = 5$

$f'(0) = b$ y $f'(0) = -6 \Rightarrow b = -6$

$f''(x) = 6x + 2a$; $f''(1/2) = 3 + 2a$ y $f''(1/2) = 0$

$a = -\frac{3}{2}$

La función que buscamos es $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$

Ejercicio 4. **Asíntotas. Monotonía. (*)**

Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{-1,2\}$ definida como $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$

a)Estudia y calcula las asístontas de la gráfica de f.

b)Determina los intervalos de crecimiento y decreciminto de f.

c)Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f que corte a la asíntota horizontal.

a) Los candidatos a asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=2$. ya que son puntos de discontinuidad.

Tenemos que comprobar que realmente son A.V realizando los límites

$$\lim_{x \to -1} f(x) \overset{?}{=} \infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{-0(-3)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2}{+0(-3)} = -\infty$$

$\Rightarrow$ $x=-1$ es A.V

$$\lim_{x \to 2} f(x) \overset{?}{=} \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{8}{3(-0)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{8}{3(+0)} = +\infty$$

$\Rightarrow$ $x-2$ es A.V

Ahora estudiamos las asíntotas del tipo $y = mx + n$; $m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y si $\exists m$;

$$n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)\cdot x} = 0 \text{ por comparación } \frac{x^2}{x^3}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = 2$$

$y = 2$ es una asíntota horizontal de $f(x)$.

b) Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f tenemos que estudiar el signo de f'

$$f'(x) = \left[\frac{2x^2}{x^2-x-2}\right]' = \frac{4x(x^2-x-2) - 2x^2(2x-1)}{(x^2-x-2)^2}$$

$$= \frac{4x^3 - 4x^2 - 8x - 4x^3 + 2x^2}{(x^2-x-2)^2} = \frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}$$

El signo de f' coincide con el de $-2x^2-8x$;

Signo de f'

f decreciente | f c | f creciente | f c. | f Creciente

$-$ $\quad -4 \quad$ $+$ $\quad -1 \quad +0 \quad$ $-$ $\quad 2 \quad$ $-$

f en $(-\infty, -4) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ es decreciente

f en $(-4,-1) \cup (-1, 0)$ es creciente.

c) Para saber si la gráfica de f y la asíntota horizontal $y=2$ se cortan tenemos que resolver la ecuación $f(x)=2$;

$$\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = 2 \; ; \quad 2x^2 = 2x^2 - 2x - 4 \Rightarrow 2x = -4$$
$$x = -2$$

La gráfica de f y la asíntota se cortan en el punto $(-2, f(-2))$; $(-2, 2)$

Jueves 14 de diciembre de 2017

Ejercicio 5. Integral indefinida. (Racional)

Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$

Es racional.

$$\begin{array}{r|l} -x^2 & x^2+x-2 \\ \hline +x^2+x-2 & -1 \\ \hline +x-2 & \end{array}$$

$$\frac{-x^2}{x^2+x-2} = -1 + \frac{x-2}{x^2+x-2}$$

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx = -\int dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx = -x + I$$

$$I = \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\ ;$$

Ahora factorizamos el denominador, usando la ecuación de 2º grado.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-2)}}{2a}\ ; \quad x = \frac{-1 \pm 3}{2}\ ; \quad x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

$$\frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+2)}\ ; \quad A(x+2) + B(x-1) = x-2$$

$$(A+B)x + (2A-B) = x-2$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A-B=-2 \end{cases} \quad 3A = -1\ ; \quad A = -\frac{1}{3}$$

$$B = 1-A\ ; \quad B = 1+\frac{1}{3}\ ; \quad B = \frac{4}{3}$$

$$I = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x-1)} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{(x+2)} = -\frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\ln|x+2|$$

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx = -x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\ln|x+2| + k$$

Ejercicio 6. **Integral indefinida. (Partes)**

Calcula $\int e^x \, sen(x) dx$

Esta integral se hace por partes.

$u(x) = e^x \quad u'(x) = e^x dx$

$v(x) = -\cos(x) \quad v'(x) = sen(x) dx$

$$\int e^x \cdot sen(x) dx = -e^x \cdot \cos(x) + \int \cos(x) \cdot e^x dx$$

Volvemos a integrar por partes. $\int \cos(x) \cdot e^x dx$

$u(x) = e^x \quad u'(x) = e^x dx$

$v(x) = sen(x) \quad v'(x) = \cos(x) dx$

$$\int \cos(x) e^x dx = e^x \cdot sen(x) - \int e^x \cdot sen(x) dx$$

Total:

$$\int e^x \cdot sen(x) dx = -e^x \cos x + e^x \cdot sen(x) - \int e^x sen(x) dx$$

$$2\int e^x \cdot sen(x) dx = e^x (sen(x) - \cos(x));$$

$$\int e^x \cdot sen(x) dx = \frac{e^x (sen(x) - \cos(x))}{2};$$

Ejercicio 7. **Integral indefinida. (Cambio de variable)**

Calcula $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ **Sugerencia realiza el cambio** $\sqrt{x+2} = t$

$\sqrt{x+2} = t$ $\qquad dx = 2t\,dt$

$$I = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} \quad \Big| \quad \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\,dx = dt \Rightarrow$$

$x+2 = \quad \cdot \quad x = t^2 - 2$

$$I \underset{\sqrt{x+2}=t}{=} \int \frac{2t\,dt}{(t^2-4)t} = \int \frac{2\,dt}{t^2-4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 - 1}$$

$\frac{t}{2} = z \qquad dt = 2\,dz \qquad I = \int \frac{dt}{z^2-1}$

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} \; ; \quad (A+B)z + (A-B) = 1$$

$A + B = 0 \qquad A = \frac{1}{2}$

$A - B = 1 \qquad B = -1/2$

$$\int \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z+1} \; ; \; I = \frac{1}{2}\ln|z-1| - \frac{1}{2}\ln|z+1|$$

$z = \frac{t}{2} \quad t = \sqrt{x+2} \; ; \; z = \frac{\sqrt{x+2}}{2}$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{2}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}+2}{2}\right| + k$$

Ejercicio 8. **Derivabilidad y extremos absolutos.(*)**

Sea la función derivable $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} a - x \; si \; x \leq 1 \\ \frac{b}{x} + lnx \; si \; x > 1 \end{cases}$

a) Calcula ***a*** y ***b***

b) Para ***a=3*** y ***b=2*** calcula los extremos absolutos de f en el intervalo ***[0, e]***

a) Si f es derivable entonces f es continua, empezamos estudiando la continuidad de f.

Para valores menores que 1 es continua por ser un polinomio y para valores mayores que 1 también por ser una suma de funciones continuas.

Veamos la continuidad en $x=1$

¿$\exists \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$?

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} a - x = a - 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{b}{x} + \ln x = b$

$f(1) = a - 1$.

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to 1} f(x) \Leftrightarrow a - 1 = b$ $\quad a = 1 + b$

$\Rightarrow f$ continua en $x = 1 \Leftrightarrow \boxed{a - 1 = b}$

Ahora estudiamos la derivabilidad. f es derivable para $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ y la derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & x < 1 \\ -\frac{b}{x^2} + \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$

Veamos si f es derivable en $x=1$

$$f'(1^-) \overset{?}{=} f'(1^+)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{-1 = \frac{-b}{1^2} + \frac{1}{1}}$$

Para que f sea derivable $b=2$ y $a+b=2$ $a=3+e$

Como f es derivable $a=3$ y $b=2$.

b)

Sea $f(x) = \begin{cases} 3-x & x \leq 1 \\ \frac{2}{x} + \ln x & x > 1 \end{cases}$ derivable en $\mathbb{R}$

Extremos absolutos en $[0,e]$

- Los candidatos son $(0, f(0))$, $(e, f(e))$ por ser los extremos del intervalo
- Los puntos $(x_0, f(x_0))$ tales que $f'(x_0)=0$
- Los puntos $(\hat{x}, f(\hat{x}))$ tales que $\nexists f'(\hat{x})$.

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad ; \quad f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x-2}{x^2} & \text{si } > 1 \end{cases}$$

- $f'(x) = 0 \iff x = 2$
- No hay puntos para los que no existe f'

Tenemos que comparar: $(0, f(0))$; $(e, f(e))$ y $(2, f(2))$

$f(0) = 3 - 0 = 3$

$f(e) = \frac{2}{e} + \ln e = \frac{2+e}{e} \cong 1'73$

$f(2) = \frac{2}{2} + \ln 2 = 1 + \ln 2 \cong 1'69$

$(0, 3) \rightarrow$ Máximo absoluto

$(2, f(2)) \rightarrow$ Mínimo absoluto.

Jueves 20 de diciembre de 2017

Ejercicio 9. Integral indefinida. (Concepto de primitiva) (*)

Determina la función $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x) = \ln(x)$ **y que su gráfica tiene una tangente horizontal en el punto** $\boldsymbol{P(1, 2)}$.

Como la gráfica de f tiene una recta tg horizontal en $(1,2)$, esto quiere decir que $f'(1)=0$ y $f(1)=2$

ya que la recta tg a la gráfica de f en $(1, f(1))$ es $y = f'(1)(x-1)+f(1)$

Como es horizontal $f'(1)$ es 0 y como pasa por el $(1,2)$; $f(1)=2$.

Por otro lado $f'(x) = \int f''(x)\,dx$

$\Rightarrow f'(x) = \int \ln(x)\,dx$ (esta integral se hace por partes)

$I = \int \ln(x)\,dx$;

$u(x) = \ln(x)$; $u'(x) = \frac{1}{x}\,dx$

$v(x) = x$ $\quad v'(x) = dx$

$I = x\ln(x) - \int dx = x\cdot\ln(x) - x + k$

$f(x) = x\cdot\ln(x) - x + k$; $f'(1)=0 \Rightarrow -1+k=0 \Rightarrow k=1$

$f'(x) = x\cdot\ln(x) - x + 1$;

$f(x) = \int x\cdot\ln(x)\,dx - \int x\,dx + \int dx$

$$f(x) = \int x \ln x \, dx - \frac{x^2}{2} + x + k;$$

Hacemos $\int x \ln x \, dx$ (por partes).

$u(x) = x \quad u'(x) = dx$

$v(x) = x \ln x - x \quad v'(x) = \ln x$

$$\int x \ln x \, dx = x^2 \cdot \ln x - x^2 - \int x \cdot \ln x - x \, dx =$$

$$= x^2 \cdot \ln x - x^2 - \int x \ln x \, dx + \int x \, dx;$$

$$2 \int x \ln x \, dx = x^2 \cdot \ln x - x^2 + \frac{x^2}{2};$$

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{1}{4} x^2;$$

$$I = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2} + x + k$$

entonces; $f(x) = \dfrac{2x^2 \ln(x) - 3x^2 + 4x + 4k}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = \dfrac{-3+4+4k}{4} = \dfrac{+1+4k}{4} \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 7/4$$

Finalmente:

$f(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{3x^2}{4} + x + \frac{7}{4}$;

<u>Ejercicio 10.</u> Integral definida. Regla de Barrow.

Determina el polinomio $P(x)$ sabiendo que $P(0) = P(2) = 1$ y $\int_0^2 P(x)dx = \frac{1}{3}$.

grado $P(x) = 2 \Rightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(0) = 1$ y $P(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$; (*)

$P(2) = 1$ y $P(2) = 4a + 2b + c = 1$ (**)

(*) y (**) $\Rightarrow c = 1$ y $2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$

$\int_0^2 P(x)dx = \frac{1}{3}$; $\int_0^2 ax^2 - 2ax + 1 = \left[\frac{ax^3}{3} - ax^2 + x\right]_0^2 = \frac{8a}{3} - 4a + 2$;

$\frac{8a - 12a + 6}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow -4a = -5$; $a = 5/4$

$P(x) = \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 1$

<u>Ejercicio 11.</u> Integral definida. Regla de Barrow.

Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 0$ y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = -1$. Conociendo además que $\int_0^1 f(x)dx = 6$.

Calcula a, b y c.

1º $(0, f(0))$ extremo relativo $\Rightarrow f'(0) = 0$

2º $(-1, f(-1))$ Punto de inflexión $\Rightarrow f''(-1) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f'(0) = b$; $b = 0$

$f''(x) = 6x + 2a$; $f''(-1) = -6 + 2a$; $a = 3$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + c$;

$$6 = \int_0^1 x^3 + 3x^2 + c = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 + cx\right]_0^1 = \frac{1}{4} + 1 + c$$

$$\Rightarrow \frac{1 + 4 + 4c}{4} = 6 \Rightarrow 4c = 19 \quad c = \frac{19}{4}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{19}{4}$$

<u>Ejercicio 12</u>. Integral definida. Regla de Barrow.

Sea $I = \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$. Calcula el valor de I.

C.V.

$1 + x^2 = t$; $2x\,dx = dt$ $\quad$ si $x = 0 \Rightarrow t = 1$

si $x = 2 \Rightarrow t = 5$

$x^2 = t - 1$ $\quad$ $x^3 = x^2 \cdot x\,dx$

$x^3 = t - 1$

$$I = \int_1^5 \frac{(t-1)}{\sqrt{t}} \frac{dt}{2} = \int_1^5 \frac{\sqrt{t}}{2} dt - \int_1^5 \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{2}{3} t^{3/2}\right]_1^5 - \left[\sqrt{t}\right]_1^5 =$$

$$I = \frac{1}{3}\sqrt{125} - \frac{1}{3} - \sqrt{5} + 1 = \frac{5}{3}\sqrt{5} - \sqrt{5} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}$$

$$I = \frac{2}{3}(\sqrt{5} + 1) \quad //$$

Jueves 11 de enero de 2018.

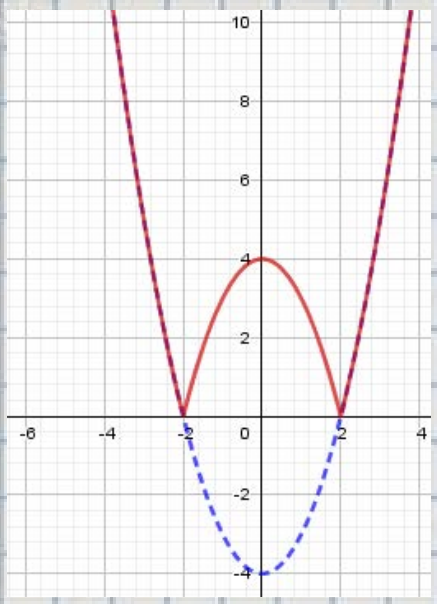
<u>Ejercicio 13.</u> Área del recinto delimitado por una función.

Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 4|$.

a) Haz un esbozo de la gráfica de *f*.
b) Calcula el área del recinto delimitado por la gráfica de *f* y la recta *y = 5*.

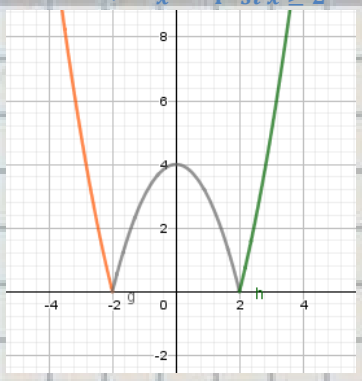
El apartado a) puede hacerse de dos modos:

Dibujamos la gráfica de $g(x) = x^2 - 4$ y lo que quede por debajo del eje OX lo invertimos respecto de este.



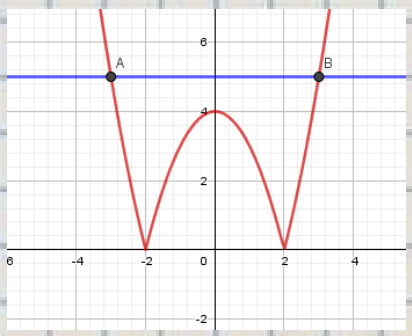
Otra forma es expresar la función sin utilizar el valor absoluto y representarla:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & si\ x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & si\ -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$



Nota: la representación de una parábola debe ser conocida.

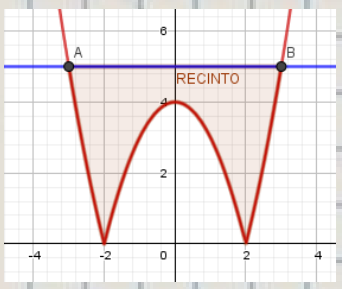
Para el apartado b) tenemos que representar en el gráfico anterior la recta *y=5*.



Tenemos que determinar los puntos de corte A y B. Para ello tenemos que resolver la ecuación $x^2 - 4 = 5$. Sus soluciones son evidentes *x=3* y *x=-3*.

Esos serán los límites de integración.

Lo siguiente que tenemos que hacer será calcular el área del recinto:



La teoría me dice que el área de ese recinto es

$I = \int_{-3}^{3} 5 - |x^2 - 4| dx;$

Veamos quién es $5 - |x^2 - 4|;$

$$5 - f(x) = \begin{cases} 5 - (x^2 - 4) & si\ x \leq -2 \\ 5 - (-x^2 + 4)\ si & -2 < x < 2 \\ 5 - (x^2 - 4) & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Esto es:

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 + 9 & si\ x \leq -2 \\ x^2 + 1\ si & -2 < x < 2 \\ -x^2 + 9 & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

$$I = \int_{-3}^{-2} (-x^2 + 9)\, dx + \int_{-2}^{2} (x^2 + 1)\, dx + \int_{2}^{3} (-x^2 + 9)\, dx$$

$$I = [\frac{-x^3}{3} + 9x]_{-3}^{-2} + [\frac{x^3}{3} + x]_{-2}^{2} + [\frac{-x^3}{3} + 9x]_{2}^{3}$$

$$I = \left[\left(\frac{8}{3} - 18\right) - \left(\frac{27}{3} - 27\right)\right] + \left[\left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(\frac{-8}{3} - 2\right)\right] + [\left(\frac{-27}{3} + 27\right) - \left(\frac{-8}{3} + 18\right)]$$

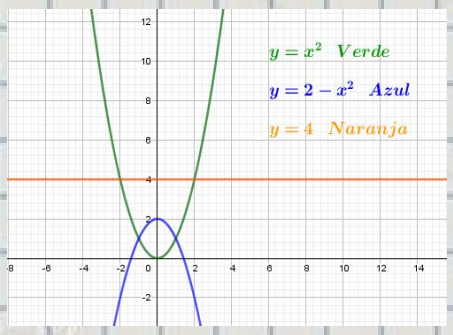
$$I = \frac{8}{3} - \frac{54}{3} - \frac{27}{3} + \frac{81}{3} + \frac{8}{3} + \frac{6}{3} + \frac{8}{3} + \frac{6}{3} - \frac{27}{3} + \frac{81}{3} + \frac{8}{3} - \frac{54}{3} = \frac{44}{3} \cong 14,67$$

<u>Ejercicio 14.</u> Área del recinto delimitado por varias funciones.

Considera el recinto delimitado por las siguientes curvas: *y=x²*, *y=2-x²*, *y=4.*

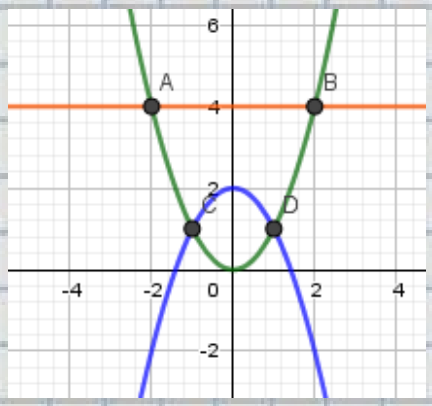
a) Haz un esbozo del recinto y determina los puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto.

Paso1



Lo primero que hacemos es representar las tres funciones, no es nada difícil ya que se trata de dos parábolas y una recta.

Paso2



Tenemos que determinar los puntos de intersección. Para eso tenemos que resolver las ecuaciones:

Naranja = verde: (A y B) $4 = x^2$ **soluciones:** $x_1 = 2; x_2 = -2$

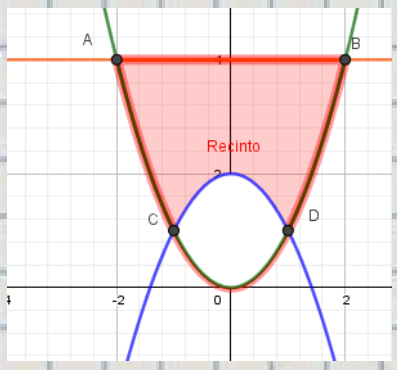
$$A = (-2, 4)\ y\ B = (2, 4)$$

Azul = verde: (C y D) $2 - x^2 = x^2$ **soluciones:** $x_1 = 1; x_2 = -1$

$$C = (-1, 1)\ y\ D = (1, 1)$$

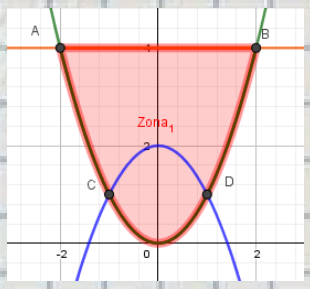
Azul = Naranja: $2 - x^2 = 4$ **soluciones: No tiene**

Paso 3:



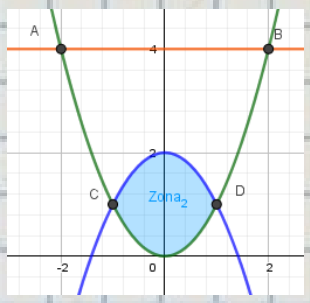
Llamaremos R al área del Recinto. R = A_1-A_2;

El área del Recinto se puede calcular como el área de la $Zona_1$ menos el área de la $Zona_2$.



A_1=Área de la $Zona_1$;

$$A_1 = \int_{-2}^{2} 4 - x^2\, dx = [4x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}$$



A_2=Área de la $Zona_2$;

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (2 - x^2) - x^2\, dx = [2x - \frac{2x^3}{3}]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

Con lo que $R = A_1 - A_2 = \frac{32}{3} - \frac{8}{3} = \frac{24}{3} = 8$

<u>Ejercicio 15.</u> Área del recinto delimitado por varias funciones.

Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* que pasa por el punto de abscisa *x=2*.

b) Esboza el recinto delimitado por la gráfica de *f*, la recta *2x+y-7=0* y el eje OX calculando los puntos de corte.

c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.

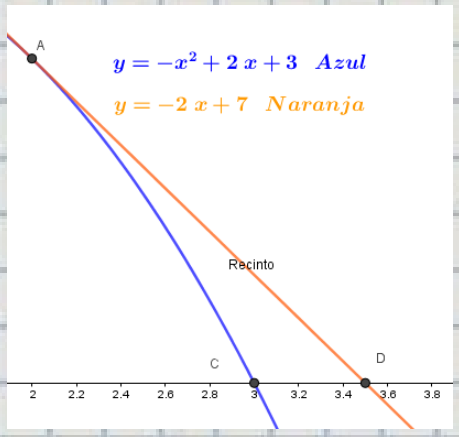
a)

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x_0. $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$;

$$f'(x) = -2x + 2; f'(2) = -2 \; y \; f(2) = 3$$

La recta tangente en cuestión es: $y = -2(x - 2) + 3$; $\quad \boldsymbol{y = -2x + 7}$

b)



Tenemos que determinar los puntos de intersección. Para eso tenemos que resolver las ecuaciones:

Naranja = Azul: (A) **Se trata del punto de tangencia.**

$$A = (2, 3)$$

Azul = Eje OX: (C) $\quad -x^2 + 2x + 3 = 0 \quad$ **soluciones:** $x_1 = 3; x_2 = -1$

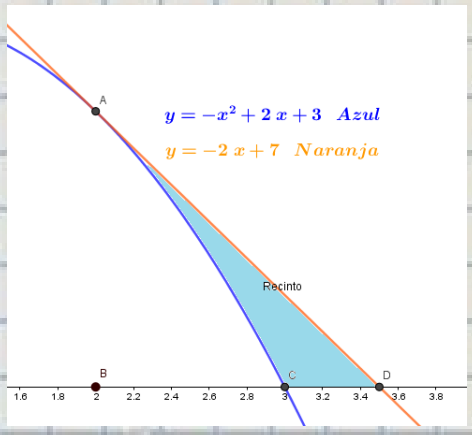
$$C = (3, 0)$$

Naranja = Eje OX: (D) $\quad -2x + 7 = 0 \quad$ **solucion:** $x_1 = 3,5$

$$C = (3,5\,; 0)$$

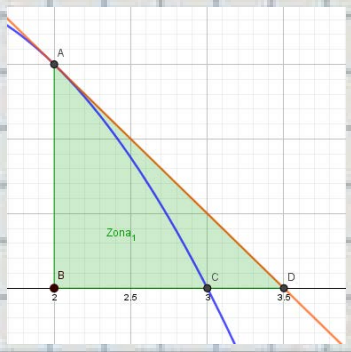
c)

Tenemos que calcular el área de este recinto.



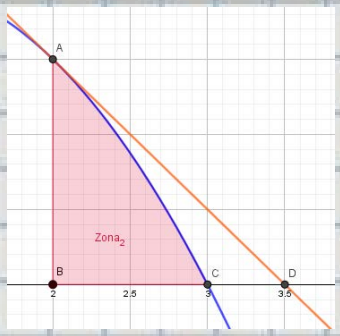
Llamaremos R al área del Recinto. R = A_1-A_2;

El área del Recinto se puede calcular como el área de la $Zona_1$ menos el área de la $Zona_2$.



A_1=Área de la $Zona_1$;

$$A_1 = \int_2^{3,5} -2x + 7\,dx = \left[-x^2 + 7x\right]_2^{3,5} = (-12,25 + 24,5) - 4 + 14 = 2,25$$



A_2=Área de la $Zona_2$;

$$A_2 = \int_2^3 -x^2 + 2x + 3\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_2^3 = (-9 + 9 + 9) - \left(-\frac{8}{3} + 4 + 6\right) = \frac{5}{3}$$

Con lo que $R = A_1 - A_2 = \frac{9}{4} - \frac{5}{3} = \frac{7}{12} \cong 0,58$

<u>Ejercicio 16.</u> Área del recinto delimitado por varias funciones.

Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

a) Halla si existe el punto de la gráfica en el que la recta tangente *es y= 3-x*.

b) Halla el área del recinto delimitado por la gráfica de f y la recta del apartado anterior.

a) Comprobamos si $y = 3 - x$; puede ser la recta tg a $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ en algún punto.

Ecuación de la recta tg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = -x + 3$

Buscamos x_0 / $f'(x_0) = -1$;

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$; $3x^2 - 6x - 1 = -1$; $3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

Tenemos dos candidatos $x = 0$ y $x = 2$.

Veamos ahora quién es $f(0)$ y $f(2)$; $f(0) = 3$ y $f(2) = -3$

Recta tg a la gráfica de f en $(0,3) \rightarrow y = -1(x-0) + 3$

" " " " " " " " $(2,-3) \rightarrow y = -1(x-2) - 3$; $y = -x - 1$

El punto que buscamos es el $(0,3)$;

b) Se trata primero de esbozar la gráfica de f y de la recta $y = -x + 3$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $f(0) = 3$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$. Estudiamos el signo de $f'(x)$

$3x^2 - 6x - 1 = 0$; $x = \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{6} = \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6}$

$x_1 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \simeq 2'15$ $x_2 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3} = -0'15$

signo f': $+$ | x_2 | $-$ | x_1 | $+$

f CRECIENTE, x_2, DECRECIENTE, x_1, CRECIENTE

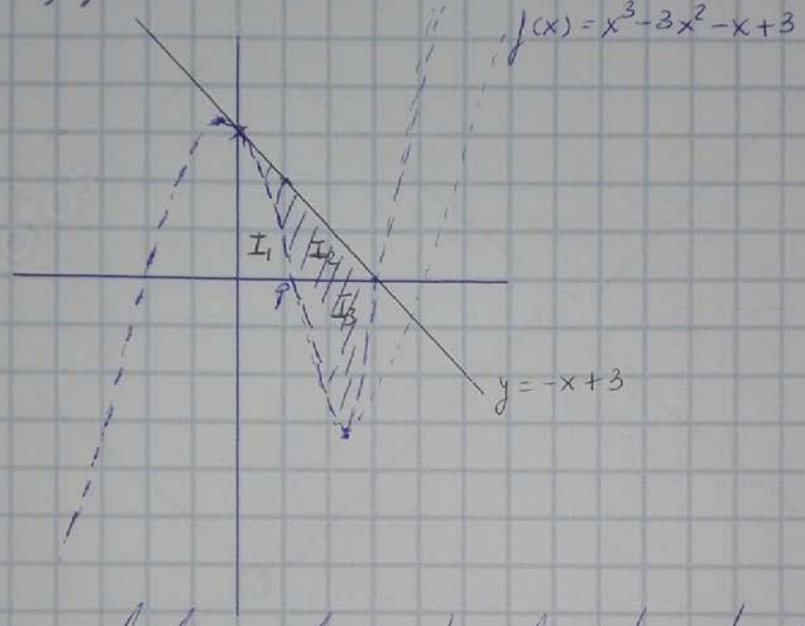
$\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)\right) \rightarrow$ Máximo R

$\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)\right) \rightarrow$ Mínimo R.

Ahora calculo:

$$f\left(\frac{3-2\sqrt{3}}{3}\right) \simeq (-0'15)^3 - 3(-0'15)^2 - (-0'15) + 3 \simeq 3'08$$

$$f\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right) \simeq (2'15)^3 - 3(2'15)^2 - (2'15) + 3 \simeq -3'08$$



Ahora calculamos los puntos de corte entre la recta y la función para poder delimitar correctamente el "recinto":

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = -x + 3 \quad ; \quad x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0 \quad x=0 \text{ y } x=0$$

Tengo que calcular el área del recinto ///

$$A = I_2 + I_3 \quad ; \quad I_2 = \frac{9}{2} - I_1 \quad ;$$

Para poder determinar I_1 y I_3 necesito $P(x_0, 0)$

$$I_1 = \int_0^{x_0} x^3 - 3x^2 - x + 3\,dx \quad \text{y} \quad I_3 = -\int_{x_0}^{3} x^3 - 3x^2 - x + 3$$

$$I_1 = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^{x_0} \qquad I_3 = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_{x_0}^{3}$$

$$I_1 = \frac{x_0^4}{4} - x_0^3 - \frac{x_0^2}{2} + 3x_0 \qquad I_3 = -\left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9\right) + I_1$$

$$A = \frac{9}{2} - I_1 + \frac{9}{4} + I_1 \quad ; \quad A = \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} \quad ;$$

También podríamos haber hecho la integral $\int_0^3 \left((-x+3) - (x^3 - 3x^2 - x + 3)\right) dx$

Jueves 18 de enero de 2018.

Ejercicio 17. Primitiva de una función.

Determina la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = xe^x$. Cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en x=1.

$f'(x) = \int x e^x dx$

$f(0) = 0$ y $f'(1) = 0$

$I = \int x \cdot e^x dx$ se hace por partes $\int u dv = u \cdot v - \int v du$

$u = x \quad du = 1$ | $I = x \cdot e^x - \int e^x dx$

$dv = e^x dx \quad v = e^x$ | $I = x \cdot e^x - e^x + k;$

$f'(x) = e^x(x-1) + k$; $f'(1) = e^1(1-1) + k = k \Rightarrow k = 0$

$f'(x) = e^x(x-1)$; $f(x) = \int e^x(x-1) dx$

$I_2 = \int e^x(x-1) dx$ por partes

$u = x-1 \quad du = dx$ / $I_2 = e^x(x-1) - \int e^x dx$

$dv = e^x dx \quad v = e^x$ / $I_2 = e^x(x-2) + k$

$f(x) = e^x(x-2) + k$ $\quad f(0) = e^0(0-2) + k = -2 + k$

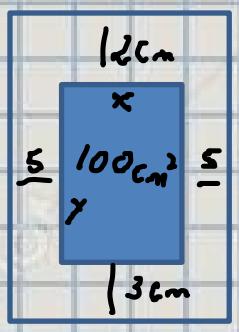
$\overset{\shortparallel}{0} \Rightarrow k = 2$

$$\boxed{f(x) = e^x(x-2) + 2;}$$

Ejercicio 18. **Problema de optimización.**

Una imprenta recibe un encargo para realizar una tarjeta rectangular con las siguientes características: la superficie rectangular que debe ocupar la zona impresa debe ser de 100 cm^2, el margen superior tiene que ser de 2cm, el inferior de 3cm y los laterales de 5cm cada uno.

Calcula, si es posible, las dimensiones que debe tener la tarjeta de forma que se utilice la menor cantidad de papel posible.



Relación $x \cdot y = 100$ $\quad y = \frac{100}{x}$

$f(x,y) = (x+10)\cdot(y+5)$ función objetivo

$f(x) = (x+10)\cdot\left(\frac{100}{x}+5\right)$

$f(x) = \frac{(x+10)(100+5x)}{x}$

$f(x) = \frac{5x^2+150x+1000}{x}$

Ahora buscamos extremos relativos

$f'(x) = \frac{(10x+150)\cdot x-(5x^2+150x+1000)}{x^2}$

$f'(x) = \frac{5x^2-1000}{x^2}$; $f'(x)=0$

$x^2 = 200$; $x = 10\sqrt{2}$

Veamos que se trata de un mínimo

$f''(x) = \frac{10x\cdot x^2-2x(5x^2-1000)}{x^4} = \frac{2000x}{x^4} > 0 \Rightarrow$ mínimo

La tarjeta debe tener $5+10\sqrt{2}$ cm de alto y $10+5\sqrt{2}$ de ancho

<u>Ejercicio 19.</u> Aplicaciones de la derivada.

Considera la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f* y determina los extremos relativos de *f*. (abscisas dónde se obtienen y valores que se alcanzan).

b) Halla la ecuación de la recta normal en el punto de abscisa x=0.

a) Estudiamos el signo de f',

$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $f'(x) = 0$; $e^x - e^{-x} = 0$;
$e^x = e^{-x}$; $x = -x$; $x = 0$

signo f': $-$ | 0 | $+$

f es decreciente en $(-\infty, 0)$
f es creciente en $(0, +\infty)$
$(0, f(0))$ es un mínimo relativo
$(0, 1)$ mínimo relativo

b) $y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$ ecuación recta normal

$f'(0) = 0 \Rightarrow$ la recta en $(0, f(0))$ es horizontal
con lo que la recta normal es vertical
y pasa por el $(0, 0) \Rightarrow$ es $x = 0$

Ejercicio 20. **Área del recinto delimitado por varias funciones.**

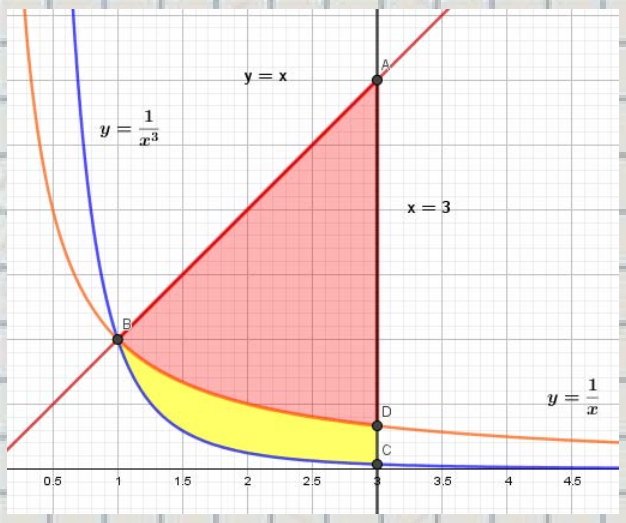
Considera el recinto del primer cuadrante delimitado por la recta $y = x$, la gráfica de la función $y = \frac{1}{x^3}$ y la recta $x = 3$.

a) Esboza el recinto.

b) Calcula el área del recinto.

c) Si consideras la gráfica de la función $y = \frac{1}{x}$, en lugar $y = \frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o menor que la del recinto inicial? ¿Por qué?

a)



El recinto es la zona amarilla junto a la zona roja

Llamamos A al área de dicho recinto;

$$A = \int_1^3 x - \frac{1}{x^3}\, dx$$

b) $$A = \int_1^3 x - \frac{1}{x^3}\, dx = \int_1^3 x\, dx - \int_1^3 \frac{1}{x^3}\, dx;$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^3 - \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3 =$$

$$\frac{9}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{9} - 1\right] = 4 - \frac{4}{9} = \frac{32}{9}$$

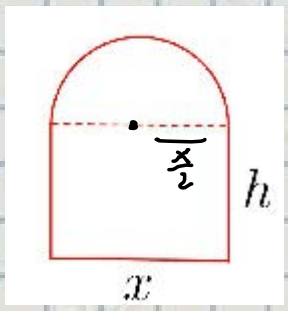
c) Si en lugar de $\frac{1}{x^3}$ tomara $\frac{1}{x}$, el recinto inicial sería solo la zona roja, que es una parte del recinto inicial, por tanto sería menor.

Se ha obviado el cálculo de los puntos de corte por evidente

Jueves 25 de enero de 2018.

Ejercicio 21. **Problema de optimización.**

Se quiere hacer una puerta rectangular, coronada por un semicírculo como en la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 m^2. Si es posible determina la base x para que el perímetro sea mínimo.



Variables x y h

Relación $\Rightarrow$ hueco de la puerta 16 m^2

El hueco de la puerta está formado por un rectángulo y una semicircunferencia de radio $x/2$

Área del hueco de la puerta $= A$; $A = x \cdot h + \frac{\pi x^2}{8}$

$\Rightarrow 16 = \frac{8xh + \pi x^2}{8}$; $128 = 8xh + \pi x^2$; $h = \frac{128 - \pi x^2}{8x}$;

Ahora veamos la función objetivo, que es la función que me da el perímetro:

$P(x,h) = x + 2h + \pi \cdot \frac{x}{2}$; $P(x) = x + \frac{128 - \pi x^2}{4x} + \frac{\pi x}{2}$

$$P(x) = \frac{4x^2 + 128 - \pi x^2 + 2\pi x^2}{4x} = \frac{(4+\pi)x^2 + 128}{4x}$$

Estudiemos el signo de $P'(x)$ para determinar los extremos relativos;

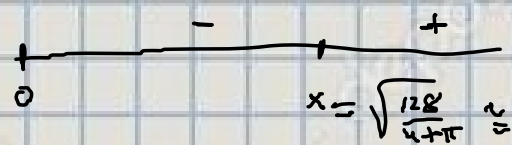
$$P'(x) = \frac{2(4+\pi)x \cdot 4x - 4[(4+\pi)x^2 + 128]}{16x^2}$$

$$P'(x) = \frac{4(4+\pi)x^2 - 512}{16x^2}$$

Como $x > 0$ signo $P'(x) =$ signo $(4(4+\pi)x^2 - 512)$

$4(4+\pi)x^2 - 512 = 0; \quad x^2 = \frac{512}{4(4+\pi)} = \frac{128}{4+\pi}$

signo P'



$x = +\sqrt{\frac{128}{4+\pi}} \simeq 4'23$

P decrece cuando $x \in (0, \sqrt{\frac{128}{4+\pi}})$ y crece cuando $x > \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$ $\Rightarrow$ que cuando $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$ se alcanza un mínimo

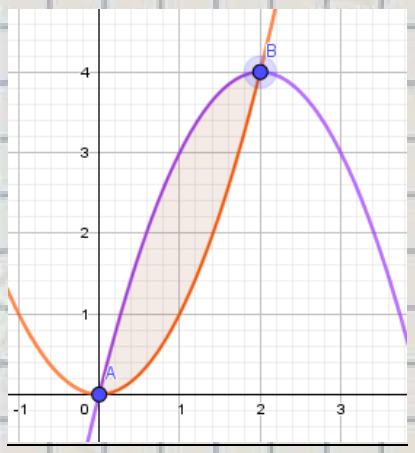
si $x = \sqrt{\frac{128}{4+\pi}}$ $\quad h = \frac{128 - \pi \frac{128}{4+\pi}}{8\sqrt{\frac{128}{4+\pi}}} \simeq 2'12$

La base de la puerta mide $8\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$ y el lado recto $\frac{512}{8 \cdot \sqrt{2(4+\pi)}} = \frac{8}{\sqrt{2(4+\pi)}}$

<u>Ejercicio 22.</u> Área del recinto delimitado por varias funciones.

Considera la región limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

a) Esboza la gráfica de la región delimitada por ambas gráficas y determina los puntos de corte de las mismas.
b) Expresa el área como una integral.
c) Calcula el área.



Puntos de corte:

$x^2 = -x^2 + 4x$

$2x^2 - 4x = 0$

$x = 0$ y $x = 2$

$(0,0)$ y $(2,4)$ puntos de corte.

Área recinto $= \int_0^2 -x^2 + 4x - x^2 \, dx$

$A = \int_0^2 -2x^2 + 4x \, dx$

$A = \left[-2\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_0^2 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3} \; u^2$

Ejercicio 23. **Integral defina.**

Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ **sugerencia** $(t = \sqrt[4]{x})$

$t = \sqrt[4]{x}$; $dt = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ $\quad t^4 = x \quad \sqrt{x} = t^2$

$x^3 = t^{12}$

$dx = 4\sqrt[4]{x^3}\,dt$

$dx = 4\sqrt[4]{t^{12}}\,dt$

$dx = 4t^3\,dt$

Si $x = 1 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = 1 \Rightarrow t = 1$

Si $x = 16 \Rightarrow t = 2$

$$I = \int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} \underset{t=\sqrt[4]{x}}{=} \int_1^2 \frac{4t^3}{t^2+t}\,dt \quad \text{Polinómica}$$

$$\begin{array}{l|l} t^3 & t^2+t \\ \hline -t^3-t^2 & t-1 \\ \quad -t^2+t & \end{array}$$

$t^3 = (t^2+t)\cdot(t+1) - t$

$$I = 4\int_1^2 t-1\,dt + 4\int_1^2 \frac{t}{t^2+t}$$

$\frac{t}{t^2+t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t}$; $A+B=1$ y $B=0$

$$I = 4\int_1^2 t\,1\,dt + 4\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$4\left[\frac{t^2}{2}-t\right]_1^2 + 4\left[\ln|t+1|\right]_1^2 = 4\left(0+\tfrac{1}{2}+\ln 3-\ln 2\right) =$$

$$= 2 + 4\ln\frac{3}{2} \simeq 3'62$$

Ejercicio 24. **Asíntotas y aplicaciones de la derivada.**

Considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **definida por** $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ $si\ x \neq 1$.

a) **Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de *f*.**
b) **Estudia los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función *f* y determina los extremos relativos de *f*. (abscisas dónde se obtienen y valores que se alcanzan).**

a) Candidatos a asíntotas verticales punto de discontinuidad, en este caso $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$\Rightarrow x = 1$ Asíntota H.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Veamos ahora asíntotas del tipo $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y si } \exists m \to n = \lim_{x \to \infty} f(x) - mx$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - x} = 1 \text{ en } +\infty \text{ y } -\infty \Rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \text{ en } \pm\infty$$

$\rightarrow y = x + 1$ es una Asíntota O.

b) Se trata de estudiar el signo de f'

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1} \; ; \; f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Signo f': $+$ | 0 | $-$ | 1 | $-$ | 2 | $+$

f decreciente en $(0, 1) \cup (1, 2)$
f creciente en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

$\Rightarrow (2, f(2))$ mínimo relativo $(2, 4)$
$(0, f(0))$ máximo relativo $\rightarrow (0, 0)$