1.- CLASIFICIACIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES.

Sistema lineal heterogéneo: es aquel en el que no todos los términos independientes son nulos. ***Ej:***

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=2 \\ 3x-4y+z=0 \\ x-y+2z=8 \end{array}\right\}$$

Sistema lineal homogéneo: es aquel en el que todos los términos independientes son nulos. ***Ejemplo:***

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ 3x+y+2z=0 \end{array}\right\}$$

Según su número de soluciones, los sistemas pueden ser:

- **Incompatibles**: si no tienen solución.
- **Compatibles**: si tienen solución.
  - **Determinado**: si la solución es única.
  - **Indeterminado**: si existe más de una solución.

2.-EXPRESIÓN MATRICIAL DE UN SISTEMA.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\}$$

Llamamos expresión matricial de este sistema a la expresión:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{es decir,} \quad A\cdot X=B$$

A **Matriz de los coeficientes** X **Matriz de las incógnitas** B **Matriz de los términos independientes**

También llamamos **matriz ampliada**, A^*, del sistema a la matriz formada por los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes de cada ecuación.

$$A^*=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ejemplo:

Determina la expresión matricial de los siguientes sistemas, y resuélvelos como una ecuación matricial.

a)
$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ -2x-y+z=-1 \\ x-y+2z=2 \end{array}\right\}$$

b)
$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y+z=1 \\ x-4y-2z=0 \\ -x-6y-5z=-1 \end{array}\right\}$$

3.-TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS.

El sistema $A \cdot X = B$ es compatible $\Leftrightarrow$ $Rango(A) = Rango(A^*)$

3.1.-Discusión de sistemas.

Discutir o estudiar un sistema consiste en clasificarlo sin resolverlo, aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius.

- Si $Rango(A) \neq Rango(A^*)$, el sistema es **incompatible**.
- Si $Rango(A) = Rango(A^*)$ el sistema es compatible
  - Si coincide con el número de incógnitas, el sistema es **compatible determinado**.
  - Si es menor que el número de incógnitas, el sistema es **compatible indeterminado**.

Debemos tener en cuenta que: $Rango(A) \leq Rango(A^*) \leq mínimo(nº ecuaciones, nº incógnitas)$

Ejemplo sin parámetros: Estudia el número de soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ x - 4y - 3z = -2 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 2 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 2 \\ -2x + 2z = 0 \\ -x - 3y + 3z = 8 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = -2 \\ 8x + 5y + 5z = 1 \end{array}\right\}$ **e)** $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y + 4z = 5 \\ 2x - y + 3z = 4 \end{array}\right\}$

Ejemplo con parámetro/s: Discute, en función de los valores que tome cada parámetro, los sistemas de ecuaciones:

a) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - z = 6 \end{array}\right\}$ parámetro λ

b) $\left.\begin{array}{l} tx + y = 1 \\ x + (t+1)y = 1 \\ x + ty = 1 \end{array}\right\}$ parámetro t

c) $\left.\begin{array}{l} (1-k)x + y + z = 0 \\ x + (1-k)y + z = k \\ x + y + (1-k)z = k^2 \end{array}\right\}$ parámetro k

d) $\left.\begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ax - y = a + 1 \end{array}\right\}$ parámetro a

e) $\left.\begin{array}{l} x - y + z = -1 \\ y + z = 2p \\ x + 2z = p^2 \end{array}\right\}$ parámetro p

f) $\left.\begin{array}{l} qx + qy - z = 2 \\ 3x - qy = 0 \\ 5x + qy = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$ parámetro q

g) $\left.\begin{array}{l} mx + y = 0 \\ -y + 2mz = 0 \\ -x + my = 0 \end{array}\right\}$ parámetro m

4.-RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES.

4.1.-Regla de Cramer.

Dado un <u>sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas</u>: $\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}$

si se cumple que el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo, $|A| \neq 0$, entonces el sistema es compatible determinado, y su solución es: $x_i = \dfrac{|A_{x_i}|}{|A|}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

siendo A_{x_i} la matriz que resulta de sustituir en la matriz A la columna de los coeficientes de x_i por la columna de los términos independientes.

Ejemplo: Resuelve por Cramer, si es posible: **a)** $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=-2 \\ -2x-2z=0 \\ 3x-2y-3z=4 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} x+3y+z=5 \\ x+y+3z=-8 \\ 3x+y+z=3 \end{array}\right\}$ **c)** $\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=-8 \\ x+3y-2z=5 \\ 2x+y+3z=4 \end{array}\right\}$

4.2.-Generalización de la regla de Cramer.

Veamos cómo se puede utilizar la regla de Cramer para calcular la solución de un sistema, con cualquier número de ecuaciones y de incógnitas, que sea compatible indeterminado.

Resolvamos **el sistema**: $\left.\begin{array}{l} 3x+y-z=2 \\ -2x+y-z=1 \\ x+2y-2z=3 \end{array}\right\}$

<u>1er paso:</u> Comprobamos que el sistema es compatible indeterminado.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{array}\right) \quad \left.\begin{array}{l} |A| = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rango(A) = 2 \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow Rango(A^*) = 2 \end{array}\right\}$$

$Rango(A) = 2 = Rango(A^*) < nº incógnitas$

El sistema es compatible indeterminado

<u>2º paso:</u> Tomamos como referencia las ecuaciones y las incógnitas que representan al determinante que hemos encontrado distinto de cero. Así, eliminamos el resto de ecuaciones del sistema y pasamos al segundo miembro el resto de incógnitas.

$$\begin{array}{l} 1^{a} \text{ ecuación} \rightarrow \\ 2^{a} \text{ ecuación} \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{array} \neq 0 \rightarrow$$ Eliminamos la 3ª ecuación y pasamos z al segundo miembro.

El **nuevo sistema** que obtenemos es: $\left.\begin{array}{l} 3x+y=2+z \\ -2x+y=1+z \end{array}\right\}$

<u>3er paso:</u> Aplicamos la regla de Cramer <u>al nuevo sistema</u>.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+z & 1 \\ 1+z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2+z \\ -2 & 1+z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{5z+7}{5}$$

La solución de nuestro sistema queda: $x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{5\lambda+7}{5}, \quad z = \lambda$, con $\lambda \in \Re$.

Ejemplo: Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+2y+z=1 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x+z=2 \end{array}\right\}$

5.-DISCUTIR Y RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES.

a) $\left.\begin{array}{l} 2x-3y+z=0 \\ -2x-2z=0 \\ -3y-z=0 \end{array}\right\}$ **b)** $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x-z=-1 \\ 3x-y+z=10 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x-y=a \\ ax+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\}$ parámetro a **d)** $\left.\begin{array}{l} x+y-z=m \\ mx+2y-z=3m \\ 2x+my-z=6 \end{array}\right\}$ parámetro m **e)** $\left.\begin{array}{l} px+y=0 \\ -y+2pz=0 \\ -x+py=0 \end{array}\right\}$ parámetro p

Dado el sistema $\left.\begin{array}{r} mx-y=1 \\ x-my=2m-1 \end{array}\right\}$ averigua el valor de m para que: $\left\{\begin{array}{l} \text{a) no tenga solución;} \\ \text{b) tenga infinitas soluciones;} \\ \text{c) tenga una única solución;} \\ \text{d) la solución del sistema tenga } x=3. \end{array}\right.$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1 Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+z=7 \\ x+z=4 \\ 3x-2y+z=2 \end{array}\right\}$

Sol: S.C.D. $x=1; y=2; z=3$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 5x+z=2 \end{array}\right\}$

Sol: S.C.I. $x=\frac{2-t}{5}; y=\frac{3t-1}{5}; z=t$

c) $\left.\begin{array}{r} x+y+z+t=0 \\ 2x-3y+2z-8t=0 \\ 2x+7y+2z+2t=0 \end{array}\right\}$

Sol: S.C.I. $x=-\lambda \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=\lambda \quad , \quad t=0$

d) $\left.\begin{array}{r} x+2y+4z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ 5x-3y+z=0 \\ 2x+2y-7z=0 \end{array}\right\}$ *Sol:* S.C.D. $x=0; y=0; z=0$

e) $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+z+t=1 \\ x+y+t=1 \\ x+z+t=1 \end{array}\right\}$ *Sol:* S.C.D. $x=\frac{1}{3}; y=\frac{1}{3}; z=\frac{1}{3}; t=\frac{1}{3}$

2 Discutir los siguientes sistemas según los valores del parámetro y resolverlos en los casos que se indican:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x+y+az=4 \\ x+z=2 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$ para a=2 y a=1

Sol: para a=2 S.C.I. y para $a\neq 2$ S.C.D.

a=2 $\Rightarrow$ $x=2-\lambda \quad , \quad y=0 \quad , \quad z=\lambda$

a=1 $\Rightarrow$ *x=2, y=0, z=0*

b) $\left.\begin{array}{r} 2y-z=a \\ 3x-2z=11 \\ y+z=6 \\ 2x+y-4z=a \end{array}\right\}$ para a=6

Sol: para a=6 S.C.D. y para $a\neq 6$ S.I.

a=6 $\Rightarrow$ *x=5, y=4, z=2*

c) $\left.\begin{array}{r} (a+1)x+y+z=a+1 \\ x+(a+1)y+z=a+3 \\ x+y+(a+1)z=-2a-4 \end{array}\right\}$ para a=-3 y a=1

Sol: para a=0 S.I., para a=-3 S.C.I., para otros casos S.C.D.

a=-3 $\Rightarrow x=\frac{4+3\lambda}{3} \quad , \quad y=\frac{2+3\lambda}{3} \quad , \quad z=\lambda$

a=1 $\Rightarrow$ *x=2, y=4, z=-6*

d) $\left.\begin{array}{r} x+ay-az=0 \\ 12x-(a+2)y-2z=0 \\ ax-2y+z=0 \end{array}\right\}$ para a= 2, a=1

Sol: para a=1, a=-6, S.C.I., para otros casos S.C.D.

a=2 $\Rightarrow$ *x=0, y=0, z=0*

a=1 $\Rightarrow$ $x=\frac{\lambda}{3} \quad , \quad y=\frac{2\lambda}{3} \quad , \quad z=\lambda$

e) $\left.\begin{array}{r} x+3y-3z=4 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+2y+kz=5 \end{array}\right\}$ para k=-2

Sol: para k=-2 S.C.I., para otros casos S.C.D.

k=-2 $\Rightarrow x=1 \quad , \quad y=1+\lambda \quad , \quad z=\lambda$

f) $\left.\begin{array}{r} x+(t+1)y+tz=t+1 \\ x+(t+1)y+z=0 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$ para t=0

Sol: para t=0 S.C.I., para t=1 S.I, para otros casos S.C.D.

t=0 $\Rightarrow$ $x=1-\lambda \quad , \quad y=\lambda \quad , \quad z=-1$

3 Un cajero automático contiene sólo billetes de 10, 20 y 50 euros. En total hay 130 billetes con un importe de 3000 €.

a) ¿Es posible que en el cajero haya el triple número de billetes de 10 que de 50?

b) Suponiendo que el número de billetes de 10 es el doble que el número de billetes de 50, calcula cuántos billetes hay de cada tipo. *(Selectividad Junio 2008)*

Sol.: a) No es posible.

b) De 10 euros, 80 billetes, de 20 euros, 10 billetes y de 50 euros, 40 billetes.

4 Escribir un sistema de 3 ecuaciones con dos incógnitas de modo que:

a) rg(A)=2, rg(A*)=3 ;
b) rg(A)=2, rg(A*)=2 ;
c) rg(A)=1, rg(A*)=2 ;

d) rg(A)=1, rg(A*)=1 ;
e) rg(A)=2, rg(A*)=1.

5 Resuelve $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ *(Selectividad Junio 2006)* *Sol. :* $x=1$, $y=-1$, $z=1$

6 Resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

7 Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} 3x+2y-5z &= 1 \\ 4x+y-2z &= 3 \\ 2x-3y+az &= b \end{aligned}\right\}$

a) Determina a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones
b) Resuelve el sistema resultante. *Sol.: a)* $a=44/5$ *y* $b=5$ *b)* $x=\frac{5-\lambda}{5}$, $y=\frac{14\lambda-5}{5}$, $z=\lambda$

8 Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} x+\lambda y+(\lambda-1)z &= 1 \\ y+z &= 1 \\ 2x+y-z &= -3 \end{aligned}\right\}$

a) Halla todos los posibles valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas.
b) Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.
c) Discute el sistema para los restantes valores de λ.
Sol.: a) $\lambda=3$ *b)* $x=\lambda-2$, $y=1-\lambda$, $z=\lambda$ *c) para* $\lambda\neq 3$ *Sistema Incompatible*

9 Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de k : $\left.\begin{aligned} x+ky+z &= 0 \\ kx+y+z &= 0 \\ x+y+kz &= 0 \end{aligned}\right\}$

Sol.: Si $k=1$ *S.C. I.,* $x=-\lambda-\mu$, $y=\lambda$, $z=\mu$
Si k=-2 S.C. I.., $x=\lambda$, $y=\lambda$, $z=\lambda$
Si $k\neq 1 y k\neq -2$ *S.C. D. ;* $x=0$, $y=0$, $z=0$

10 Considera el sistema de ecuaciones: $\left.\begin{aligned} ax+y+z &= 4 \\ x-ay+z &= 1 \\ x+y+z &= a+2 \end{aligned}\right\}$

a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.
b) Resuelve el sistema que se obtiene para a=-2. *(Selectividad Septiembre 2007)*
Sol.: a) para a=-1, $x=-3/2$, $y=\frac{5-2\lambda}{2}$, $z=\lambda$; *b)* $x=-4/3$, $y=1$, $z=1/3$

11 Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$

a) Halla los valores del parámetro m para los que el rango de A es menor que 3. *(Selectividad Junio 2008)*

b) Estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ tiene solución para cada uno de los valores de m obtenidos en el apartado anterior.

Sol.: a) $m=0$, $m=1$ *; b) Para m=0 S.I. y para m=1 S.C. I.*

12 Sabemos que el sistema de ecuaciones $\left.\begin{matrix}2x-y+3z=1\\x+2y-z=2\end{matrix}\right\}$ tiene las mismas soluciones que el que resulta al añadirle la ecuación $ax+y+7z=7$:

a) Determina el valor de a.

b) Calcula la solución del sistema inicial de dos ecuaciones, de manera que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a la unidad. *(Selectividad Septiembre 2008)*

Sol.: a) a=8 ; b) $x=6/5$, $y=1/5$, $z=-2/5$

13 Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left.\begin{matrix}x-ay=2\\ax-y=a+1\end{matrix}\right\}$ se pide:

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

b) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene una solución en la que $y=2$.

14 Un país importa petróleo de tres clases (normal, extra y súper), procedente de los países O, I, y L. En la siguiente tabla se indica la cantidad de barriles (en miles) importados de cada país y el importe de las respectivas facturas pagadas (en miles de dólares). Halla el precio por barril de cada clase de petróleo.

	Normal	Extra	Súper	Importe
O	25	5	5	675
I	10	30	2	830
L	10	8	16	740

15 Una granja contiene 56 animales entre conejos, gallinas y patos. El total de patas se cuenta por 158 y el de picos por 33. ¿Cuántos animales de cada tipo hay?

16 En una reunión, cierta parte de los presentes está jugando, otra parte está charlando, y el resto, bailando. Más tarde, 4 dejan el juego por el baile, 1 la charla por el juego y 2 el baile por la charle, con lo cual, el número de personas que está en cada grupo es el mismo. ¿Cuántas personas componen la reunión?

17 Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & -2\\6 & 6\end{pmatrix}$

a) Halla, si existe, la matriz inversa de $AB+C$.

b) Calcula, si existen, los números reales x e y que verifican: $C\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$