1.- MATRICES. TIPOS DE MATRICES.

1.1.- Definición de matriz. Terminología. Tipos de matrices.

Una **matriz** es una tabla de números distribuidos en filas y columnas.
Se dice que es de dimensión n x p, es decir, tiene n filas y p columnas.

Dos **matrices son iguales** si tienen las mismas dimensiones y los elementos que ocupan el mismo lugar son iguales.

$$A = \left(a_{i\,j}\right)_{n\ xp} = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & \ldots & a_{1p} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,p} \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices según su forma	*Ejemplo*
Matriz fila: es una matriz que sólo tiene una fila.	$A_{1\ x3} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \end{pmatrix}$
Matriz columna: es una matriz que sólo tiene una columna.	$A_{3\,x\,1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
Matriz cuadrada: es una matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas, ***n*** *x* ***n*** ; se dice que es de orden ***n***. Se llama <u>*diagonal principal*</u> de una matriz cuadrada a los elementos a_{ii}. Va de izquierda a derecha y de arriba abajo.	$A_{2\,x\,2}$(o sólo A_2) $= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ $A_{3\ x3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 8 & -6 & 0 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$
Matriz simétrica: es una <u>matriz cuadrada</u> en la que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales, es decir, $a_{ij} = a_{ji}$.	$A_{3\ x3} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 7 & 1 & 4 \\ -5 & 4 & -9 \end{pmatrix}$
Matriz antisimétrica: es una *matriz cuadrada* en la que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos, es decir, $a_{ij} = -a_{ji}$. Los elementos de la diagonal principal deben ser ceros.	$A_{3\ x3} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 \\ -5 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Tipos de matrices según sus elementos	*Ejemplo*
Matriz nula: es una matriz en la que todos sus elementos son cero.	$A_{2\,x\,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Matriz diagonal: es una *matriz cuadrada* en la que todos los elementos que **no** están en la diagonal principal son nulos.	$A_{3\ x3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$
Matriz escalar: es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.	$A_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
Matriz unidad o identidad: es una matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal principal son 1. Se representa por $I_{n\,xn}$.	$A_{2\,x\,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Matriz triangular superior: es una *matriz cuadrada* en la que todos los elementos que están debajo de la diagonal principal son nulos.	$A_{3\ x3} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Matriz triangular inferior: es una *matriz cuadrada* en la que todos los elementos que están encima de la diagonal principal son nulos.	$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 0\\ 7 & -8 & 9\end{pmatrix}$

1.2.- Matriz traspuesta de una matriz.

La matriz traspuesta de una matriz A es la matriz que se obtiene al cambiar las filas por las columnas. Se representa por A^t.

Ejemplo: $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -4 & -5 & 6\end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{3\times 2}=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & -5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

2.- OPERACIONES CON MATRICES.

2.1.- Suma/Resta de matrices.

Para sumar/restar dos matrices, éstas han de tener las mismas dimensiones, y se suman/restan elemento a elemento.

Ejemplo: $\begin{pmatrix}4 & 7 & -6\\ -5 & 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4 & -5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6 & 4 & -5\\ 0 & 3 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 7 & -6\\ -5 & 0 & 3\end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de matrices

a) Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$

b) Conmutativa: $A+B=B+A$

c) Matriz nula O: $A+O=O+A=A$

d) Matriz opuesta: es la matriz que se obtiene al cambiar todos los elementos de signo. Verifica: $A+(-A)=O$

2.2.- Producto de un número por una matriz.

Para multiplicar un número por una matriz, se multiplica el número por cada elemento de la matriz.

Ejemplo: $5\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 7 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -10 & 20\\ 35 & 0 & -5\end{pmatrix}$

2.3.- Producto de matrices.

Producto de una matriz fila por una matriz columna.

Para multiplicar una matriz fila por una matriz columna (*han de tener el mismo número de elementos*), se multiplican elemento a elemento y se suman los productos obtenidos. Se obtiene un número.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}=1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6=4+10+18=32$$

Producto de dos matrices.

Para multiplicar dos matrices (*tiene que coincidir el número de columnas de la 1ª con el número de filas de la 2ª*), se multiplica cada fila de la 1ª matriz por cada columna de la 2ª. El resultado es una matriz que tiene tantas filas como la 1ª y tantas columnas como la 2ª. $A_{n\times p}\cdot B_{p\times q}=C_{n\times q}$

Propiedades del producto de matrices

a) Asociativa: $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

b) En general, el producto de matrices **no** es conmutativo: $A\cdot B\neq B\cdot A$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 28\\ 52 & 76\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & 34\\ 46 & 74\end{pmatrix}$$

Por ello, tampoco serán ciertos los productos notables:

$(A+B)^2$ no tiene por qué ser $A^2+2AB+B^2$

$(A-B)^2$ no tiene por qué ser $A^2-2AB+B^2$

$(A+B)(A-B)$ no tiene por qué ser A^2-B^2

c) Matriz unidad (I): $A\cdot I=I\cdot A$

d) Dada una matriz cuadrada, **no** siempre existe otra matriz cuadrada tal que al multiplicarla nos da la matriz unidad. (Si existe, se trata de la matriz inversa de la matriz original $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$)

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1\cdot 9+2\cdot 2 & 1\cdot 0+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 4 \\ 3\cdot 9+4\cdot 2 & 3\cdot 0+4\cdot 3 & 3\cdot 1+4\cdot 4 \\ 5\cdot 9+6\cdot 2 & 5\cdot 0+6\cdot 3 & 5\cdot 1+6\cdot 4 \\ 7\cdot 9+8\cdot 2 & 7\cdot 0+8\cdot 3 & 7\cdot 1+8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 36 & 9 \\ 3 & 51 & 21 \\ 5 & 71 & 82 \\ 7 & 92 & 34 \end{pmatrix}$$

e) En general, el producto de matrices **no** es <u>simplificable</u>: De $A \cdot B = A \cdot C$ **no se sigue** $B = C$.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 01 \\ 2 & 02 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 01 \\ 2 & 02 \end{pmatrix}$

f) El producto de dos matrices no nulas puede ser la matriz nula.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \overset{2}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) Distributiva: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

E J E R C I C I O S Y P R O B L E M A S

1 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ calcula: a) $A + B$ b) $A - B$ c) $5A$ d) $2A - 3B$

2 Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ calcula, de los siguientes productos, los que sean posibles, y de los que no sean posibles, razona por qué no se pueden multiplicar: a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$

3 Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ calcula: a) $A \cdot B$ b) $B \cdot A$ c) Conclusiones

4 Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Halla una matriz B tal que $A \cdot B = O_{2\,\mathrm{x}\,2}$, con la condición de que B no sea la matriz nula de dimensión 2×2.

5 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula A^k.

6 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula A^{257}.

7 Resuelve el siguiente sistema matricial: $\left.\begin{array}{l} 3A-B=\begin{pmatrix} 9 & -7 & 7 \\ 20 & 3 & -10 \end{pmatrix} \\ 6A+B=\begin{pmatrix} 9 & -2 & 20 \\ 25 & -3 & -8 \end{pmatrix} \end{array}\right\}$

8 Una fábrica distribuye sus productos alimenticios A, B y C a cuatro países P, Q, R y S, según se describe en la matriz M (cantidades de toneladas). Esta fábrica ha recibido presupuestos de dos empresas E y F para el transporte de los productos a los países de destino, como indica la matriz N (en euros por tonelada).

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} P \\ Q \\ R \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} 200 & 100 & 120 \\ 110 & 130 & 200 \\ 220 & 200 & 100 \\ 150 & 160 & 150 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{y} \quad N = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} P & Q & R & S \end{array} \\ \begin{array}{c} E \\ F \end{array} & \begin{array}{cccc} 500 & 450 & 375 & 350 \\ 510 & 400 & 400 & 350 \end{array} \end{array}$$

Efectúa el producto de las matrices y responde a las cuestiones:

- **a)** ¿Qué representa el elemento a_{11} de la matriz producto?
- **b)** ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que cuesta transportar el producto C con la empresa F?
- **c)** Indica qué elementos de la matriz producto te permiten decidir cuál es la empresa que más barato transporta el producto B a todos los países.

9 En una acería se fabrican tres tipos de productos: acero en láminas, en rollos y aceros especiales. Estos productos requieren, por cada unidad de producto fabricado, chatarra, carbón y aleaciones en las cantidades en kilogramos que se indican en la tabla de la derecha:

	Láminas	Rollos	Especiales
Chatarra	8	6	6
Carbón	6	6	4
Aleaciones	2	1	3

- **a)** Si durante el próximo mes se desea fabricar 6 unidades de acero en láminas, 4 unidades de acero en rollo y 3 unidades de aceros especiales, obtén la matriz que indica las cantidades de chatarra, carbón y aleaciones que serán necesarias.
- **b)** Si se dispone de 34 kg de chatarra, 28 kg de carbón y 8 kg de aleaciones, ¿Cuántas unidades de cada tipo de acero se podrán fabricar con estos materiales?

10 Comprueba que $A^2 - A - 2I_3 = O$ siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11 Resuelve $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

12 Sean A, B y C tres matrices tales que el producto $A\cdot B\cdot C$ es una matriz $3 \text{ x } 2$ y el producto $A\cdot C^t$ es una matriz cuadrada. Calcula, razonando la respuesta, las dimensiones de A, B y C.

13 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula A^{10}.

14 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Estudia si existe algún valor de $\lambda \in \Re$ para el cual se satisfaga $(A - \lambda I)^2 = B$.

15 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ calcula A^{253}.