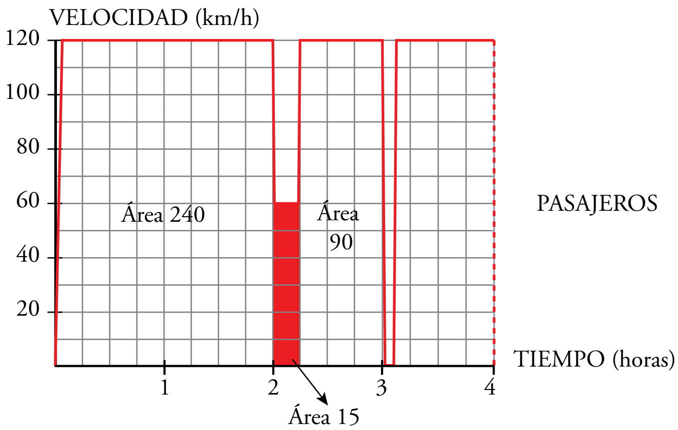
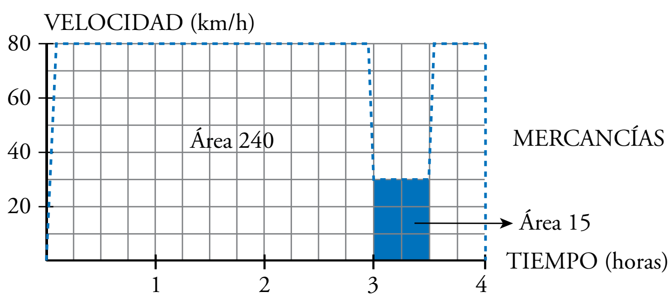
Página 357

Dos trenes

a) 240 km b) 15 km c) 240 km d) 15 km e) 90 km

f)





Página 363

1 a) 12 u^2 b) 25,1 u^2

2 a) 25,1 u^2 b) 6,9 u^2

Página 365

1 $\int_{-5}^{-1} f(x)\,dx = 4$

2 Usando la propiedad 7 tenemos:

$$f(x) \le |f(x)| \text{ para cada } x \in [a, b] \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

$$-f(x) \le |f(x)| \text{ para cada } x \in [a, b] \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [-f(x)\,dx] \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Por tanto: $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

3 a) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx =$

$$= -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

b) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx =$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

4 $c = 1$

Página 367

1 $F'(x) = log(x^2 + 4)$

2 1

Página 368

1 –4 940

2 $\frac{\pi}{4}$

Página 370

1 $\frac{253}{12}$ u^2

2 $\frac{253}{12}$ u^2

Página 371

3 a) –1 b) No existe. c) 2 d) No existe.

Página 372

1 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ u^3 Límite: [–5, 5]

Página 373

1 Hazlo tú.

Área = $\frac{37}{12}$ u^2

2 Hazlo tú.

Área = $\sqrt{3} - \frac{5}{12}\pi + 2$ u^2

3 Hazlo tú.

Área = $\frac{4171}{30}$ u^2

5 Hazlo tú.

Área = $\frac{345}{4}$ u^2

Página 375

6 Hazlo tú.

$V = 30{,}60\pi \text{ u}^3$

7 Hazlo tú.

$V = 16\pi \text{ u}^3$

8 Hazlo tú.

$V = 106{,}67\pi \text{ u}^3$

Página 376

9 Hazlo tú.

Los mínimos relativos son: (2, –9) y (–2, –9).

El máximo relativo es el punto $\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$.

10 Hazlo tú.

$a = 2\sqrt[3]{2}$

Página 377

11 Hazlo tú.

$V = \dfrac{\pi}{3} \text{ u}^3$

12 Hazlo tú.

$\dfrac{8}{3}$

Página 378

1 $-\dfrac{2}{3}$

2 3 u^2

3 $P(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 3x$

4 $\dfrac{3}{2}$

Página 379

1 a) $\sqrt{5} - 1$ b) $\dfrac{8}{3}$ c) $\dfrac{4}{e}$ d) $2\sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3}$

2 $\dfrac{1}{4}$

3 $ln\ 3$

4 $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - x)\, dx = \frac{9}{2}$ $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - x|\, dx = \frac{29}{6}$

5 a) $\dfrac{5}{6}$ b) $\dfrac{32}{3}$

6 a) $\dfrac{115}{6}$ b) $\dfrac{155}{6} \text{ u}^2$

7 El área buscada es 60 u^2.

8 $\dfrac{13}{3} \text{ u}^2$

9 El área buscada es $\dfrac{16}{3} \text{ u}^2$.

10 El área buscada es $\dfrac{11}{12} \text{ u}^2$.

11 $\dfrac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)] \text{ u}^2$

12 a) $\dfrac{4 \cdot 8}{2}$ b) 16 c) 9π d) $\dfrac{9\pi}{2}$

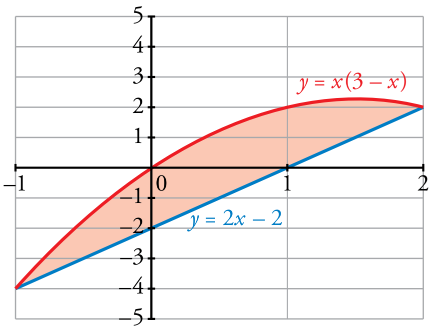
13 a) $\dfrac{49}{2}$ b) $24 - 2\pi$

14 a) $\dfrac{40}{3}\sqrt{5} \text{ u}^2$ b) $\dfrac{1}{3} \text{ u}^2$

15 a) $\dfrac{32}{3} \text{ u}^2$ b) $\dfrac{16\sqrt{2}}{3} \text{ u}^2$ c) $\dfrac{1}{2} \text{ u}^2$ d) $\dfrac{1}{2} \text{ u}^2$

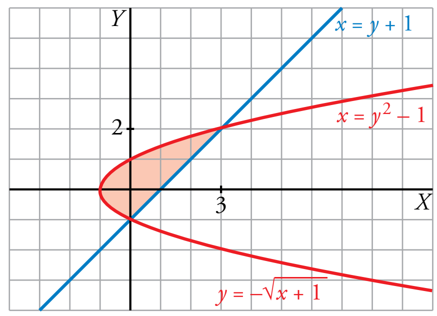
e) $\dfrac{4}{3} \text{ u}^2$ f) 9 u^2 g) $\dfrac{32}{3} \text{ u}^2$

16



El área buscada es $\dfrac{9}{2} \text{ u}^2$.

17



El área buscada es $\dfrac{9}{2} \text{ u}^2$.

18 El área buscada es $\dfrac{2}{3} \text{ u}^2$.

Página 380

19 El área buscada es: $\frac{35}{2} - 6ln\,(6)$ u^2.

20 El área buscada es: $\frac{4}{3}$ u^2.

21 Área = 1 u^2

22 a) $\frac{4}{3}$ u^2 b) $2\sqrt{2}$ u^2 c) $\frac{71}{6}$ u^2

d) $\frac{9}{2}$ u^2 e) $\frac{13}{12}$ u^2 f) $\frac{44}{15}$ u^2

23 a) $V = 8\pi$ u^3 b) $V = \frac{31}{5}\pi$ u^3 c) $\frac{\pi}{30}$ u^3

24 a) $V = \frac{3}{10}\pi$ u^3

b) 128π u^3

25 a) $F'(x) = cos\,x$

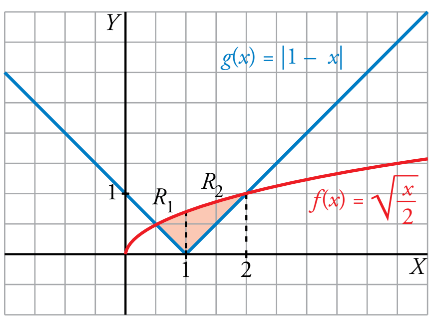
b) $F'(x) = (x^2 + 1)^4$

c) $H'(x) = e^{-x^2}$

d) $J'(x) = 0$, porque $J(x)$ es constante.

26 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc\,tg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc\,tg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

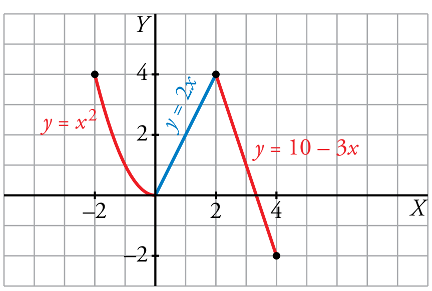
27 a)



Sus soluciones son $\frac{1}{2}$ y 2.

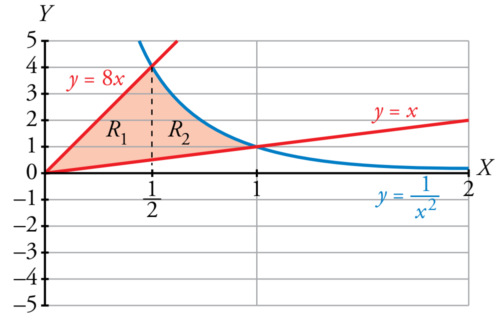
b) $\frac{13}{24}$ u^2

28



$I = \frac{11}{3}$ $J = 5$ $K = \frac{26}{3}$

29



El área buscada es $\frac{3}{2}$ u^2.

30 El área buscada es $(17e^5 - 2)$ u^2.

31 La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y = 1$.

La ecuación de la recta tangente con pendiente 6 es $y = 6x - 2$.

El área buscada es: $\frac{9}{4}$ u^2.

32 $\frac{20\pi}{3}$ u^3

33 $4(ln\,8 - ln\,4)$ u^2

34 El área buscada es: $\left(e^2 - \frac{4}{3} - 1\right)$ u^2.

Página 381

35 $V = 2\pi$ u^3

36 $y = (x - 3)\left(\frac{1}{27}x - \frac{1}{3}\right)$

37 La parábola buscada es $f(x) = -x^2 + 4x$, cuya gráfica es positiva en el intervalo [0, 3].

38 $a = -1$, $b = 0$, $c = 3$

39 $k = \frac{1}{2}$

40 $a = \frac{1}{3}$

41 a) Sus soluciones son: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (que no dependen de a).

b) La función diferencia es:

$$f(x) = ax + a - ax^2 = a(-x^2 + x + 1)$$

Si $h(x) = -x^2 + x + 1$, se tiene que: $f_1(x) = a\,h(x)$ y la primitiva de $f(x)$ es a por la primitiva de $h(x)$, es decir: $G_1(x) = a\,H(x)$. El área comprendida es, pues:

$$G_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= a\left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\text{u}^2$$

Si duplicamos a, se tiene que la función diferencia es ahora $f_2(x) = 2a\,h(x)$ y su primitiva $G_2(x) = 2a\,H(x)$.

Por lo que el área comprendida es:

$$G_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= 2a\left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\text{u}^2$$

42 $b = 3$

43 $a = 6$

44 $a = e - 1$

45 $S(t) = 4t^2 - 24t - 220$

46 Distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 2$: 6 m

Distancia recorrida entre $t = 2$ y $t = 3$: 6 m

47 $V = \frac{\pi}{-2} \cdot (e^{-6} - 1)$ u^3

48 $\frac{27\pi}{4}$

49 48π u^3

50 $\frac{4\pi}{3}$ u^3

51 a) $F'(x) = cos\, x^2$

b) $F'(x) = [(x^2)^2 + x]\, 2x = 2x^5 + 2x^3$

c) $F'(x) = \frac{1}{1 + sen\, x}$

d) $F'(x) = (1 + sen\, x) \cdot cos\, x$

52 En los puntos de abscisa –1 y 1 hay máximos o mínimos relativos.

53 $f(2) = 16$

54 $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$

Página 382

55 a) $F(x)$ es creciente y no tiene máximos ni mínimos relativos.

b) El mínimo relativo es el punto (1, 0).

56 a) Si $k > 0$, el área es: $\frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$

Si $k < 0$, el área es: $\frac{1}{2} - e^k + \frac{e^{2k}}{2}$

b) $k = ln\, 3$

57 El área buscada es $\frac{1}{6}$ u^2.

58 $F'(x) = 2x\, cos\, x^2$

59 La gráfica II es la de la función; la gráfica I, la de su derivada y la gráfica III, la de su primitiva.

60 Su área aumentará 8 u^2.

61 Cierto, puesto que si la primera derivada de una función es positiva, dicha función es creciente.

62 a) $F'(x) = 0$

b) $F'(x) = -1 - 3x^2$

c) $F'(x) = \int_1^a \frac{1}{1+t}\, dt$

d) $F'(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t}\, dt + \frac{x}{1+x}$

63 d)

64 El teorema que asegura la existencia de c es el teorema del valor medio del cálculo integral.

65 a) Falsa. b) Falsa. c) Cierta.

66 En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumple que $0 \le \frac{sen\, x}{1+x^2} \le \frac{x}{1+x^2}$ ya que $0 \le sen\, x \le x$ en dicho intervalo.

Por tanto:

$$0 \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\, x}{1+x^2}\, dx \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2} ln\,(1+x^2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) \approx 0,62 < 1$$

De esta forma queda probada la desigualdad.

Página 383

67 a) $V = 350\pi$ u^3

b) $V = \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$ u^3

68 a) Área $= 4 \cdot \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

Calculamos $G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$, mediante un cambio de variable:

$$G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx = 3 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}\, dx$$

Cambio: $\frac{x}{3} = sen\, t \rightarrow x = 3sen\, t \rightarrow dx = 3cos\, t\, dt$

$$G(x) = 3 \cdot \int \sqrt{1 - sen^2\, t} \cdot 3cos\, t\, dt = 9 \int cos^2\, t\, dt =$$

$$= 9 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\, t}{2} \right) dt = 9 \left[\frac{1}{2}\, t + \frac{1}{4}\, sen^2\, t \right] =$$

$$= \frac{9}{2}\, t + \frac{9}{4}\, sen^2\, t =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3} \right)^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3} \right)^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{x \cdot \sqrt{9 - x^2}}{2}$$

Por tanto, el área será:

$$A = 4 \cdot (G(3) - G(0)) = 4 \cdot \frac{9\pi}{4} = 9\pi \ \text{u}^2$$

b) $V = \pi \cdot \int_{-R}^{R} y^2\, dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\, dx =$

$$= \pi \cdot \left[R^2\, x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \pi \cdot \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{4}{3} \pi\, R^3$$

69 12π

70 • Despejamos y: $4y^2 = 4 - x^2 \rightarrow$

$$\rightarrow y^2 = 1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2 \rightarrow y = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}$$

• El área será: $A = 4 \cdot \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}\, dx$

• Calculamos $G(x) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2}\, dx$

Cambio: $\frac{x}{2} = sen\, t \rightarrow x = 2sen\, t \rightarrow dx = 2cos\, t\, dt$

$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\, t} \cdot 2cos\, t\, dt = 2 \int cos^2\, t\, dt =$$

$$= 2 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\, t}{2} \right) dt = \int (1 + cos\ 2t)\, dt =$$

$$= t + \frac{sen^2\, t}{2} = arc\ sen \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2} \right)^2} =$$

$$= arc\ sen \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4}$$

• El área será:

$$A = 4 \cdot [G(2) - G(0)] = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

71 a) $V = \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left(b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2} \right) dx = \pi \cdot \left[b^2 x - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2} \right]_{-a}^{a} =$

$$= \pi \cdot \left(b^2 a - \frac{ab^2}{3} + b^2 a - \frac{ab^2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi\, ab^2$$

b) $V = \pi \cdot \int_{-b}^{b} \left(a^2 - y^2 \frac{a^2}{b^2} \right) dy = \pi \cdot \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right]_{-b}^{b} =$

$$= \pi \cdot \left(a^2 b - \frac{ba^2}{3} + a^2 b - \frac{ba^2}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi\, ba^2$$

72 $F'(x) = \int_{x^2}^{x^3} sen\, t\, dt + x^2\, [3x\, sen\, (x^3) - 2sen\, (x^2)]$

73 a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{1}{r-1}$ c) π d) 1

e) $\frac{3}{2}$ f) $+\infty$ g) $\frac{\pi}{2}$ h) $+\infty$

74 El límite dado vale 1.

75 $a = 6$

Autoevaluación

1 a) $\frac{21}{4}$ u^2

b) $\int_{-3}^{-1} [(x^3 + 3x^2) - (x + 3)]\, dx = 4$ u^2

$\int_{-1}^{1} [(x + 3) - (x^3 + 3x^2)]\, dx = 4$ u^2

2 $y = 4x - 7$

$A = 9$ u^2

3 $\frac{5}{2}$

4 Área $= \frac{1}{2}$ u^2

5 Área $= 2$ u^2

6 a) $F'(e) = 4e$

b) F no tiene puntos de inflexión.

7 a) 50π u^3

b) $\frac{1}{3} \pi\, r^2\, a$ u^3