TEMA3. APLICACIONES DE LA DERIVADA.

3.1. ECUACIONES DE LA RECTA TANGENTE Y NORMAL A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO DONDE LA FUNCIÓN ES DERIVABLE.

3.2. MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS DE LA FUNCIÓN.

3.2.1. MÁXIMOS Y MÍNIMOS ABSOLUTOS.

3.3. CURVATURA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

3.4. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES. PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

3.5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES.

3.6. REGLA DE L'HÔPITAL PARA RESOLVER INDETEMINACIONES DEL TIPO

$\frac{\infty}{\infty}, \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\ \boldsymbol{y}\ \mathbf{0} \cdot \infty$. **(YA LO HEMOS VISTO EN TEMAS ANTERIORES)**

3.7. TEOREMAS DE ROLLE, VALORES INTERMEDIOS Y TEOREMA DE CAUCHY.

ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL A LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN f, EN UN PUNTO EN EL QUE f SEA DERIVABLE

Como vimos en la interpretación geométrica de la derivada, ésta es la pendiente de la recta tangente a la función (realmente a la gráfica de la función) en el punto de coordenadas $P(a, f(a))$, por lo que la **ecuación de la recta tangente** será:

$$\boxed{y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

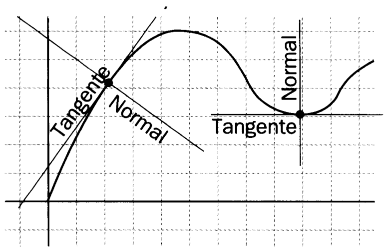
NOTA: Para calcular la ecuación de la recta tangente utilizamos la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente: $y - y_1 = m.(x - x_1)$

La normal a una curva en un punto $P(a, f(a))$ es la perpendicular a la recta tangente en dicho punto.

Si la pendiente de la tangente es $m_t = f'(a)$, la pendiente de la normal será $m_N = -\dfrac{1}{f'(a)}$ (ya que el producto de ambas debía ser -1) y **la ecuación de la recta normal** nos viene dada por:

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} \cdot (x - a)}$$

Si f ´(a) = 0, la recta tangente será horizontal y de ecuación y = f(a). En ese caso la recta normal es vertical y de ecuación x = a.



Ejemplos.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva dada por $f(x) = x^3$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Calculamos la derivada de la función dada en el punto que nos indican. Aplicando la propia definición tendremos:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2^3+3.2^2h+3.2h^2+h^3)-2^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3.2^2h+3.2h^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h.(3.2^2+3.2h+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3.2^2+3.2h+h^2) = 3.2^2 = 12$$

En consecuencia, $f'(2) = 12 \;\Rightarrow\; m_t = f'(2) = 12$ y $m_N = -\dfrac{1}{f'(2)} = -\dfrac{1}{12}$

Una vez que hemos obtenido las pendientes de las rectas tangente y normal a la curva, podemos escribir sus ecuaciones, utilizando la ecuación de la recta en la forma punto-pendiente:

Si tenemos en cuenta que el punto de tangencia tiene por coordenadas $\mathbf{(2,\, f(2)) \equiv (2,\, 8)}$, las ecuaciones de las rectas pedidas son:

Ecuación de la recta tangente: $y-8 = 12.(x-2) \;\Rightarrow\; y = 2x-16$

Ecuación de la recta normal: $y-8 = -\dfrac{1}{12}\cdot(x-2) \;\Rightarrow\; y = -\dfrac{1}{12}\cdot x + \dfrac{49}{6}$

2. Dada la parábola de ecuación $\boldsymbol{y = x^2 - 8x + 12,}$ hallar el punto donde la tangente es paralela al eje de abscisas.

Calculamos la derivada de la función dada en un punto cualquiera x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{((x+h)^2-8x+12)-(x\;\;-8x+12)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x^2+2xh+h^2-8x-8h+12)-(x^2-8x+12)}{h} = \lim\frac{2xh+h^2-8h}{h} =$$

$$= \lim_{\to 0}\frac{h.(2x+h-8)}{h} = \lim_{h}(2x+h-8) = 2x-8$$

$$h$$

Como la tangente es paralela al eje de abscisas, las dos rectas tendrán igual pendiente: si tenemos en cuenta que la pendiente del eje de abscisas es igual a cero, al igualar la derivada a cero nos queda:

$$m_t = f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2x-8 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$$

Obtenida la abscisa del punto de tangencia, la ordenada correspondiente del punto la obtenemos sustituyendo en la función: $f(4) = 4^2 - 8.4 + 12 = -4$

En consecuencia, el punto de tangencia tiene por coordenadas $(4, -4)$.

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DERIVABLES.

Una serie de aspectos de la gráfica de una función vistos anteriormente (monotonía, máximos y mínimos) y otros que veremos posteriormente, pueden estudiarse fácilmente mediante derivadas. La mayor parte de las funciones elementales con las que trabajamos son derivables en casi todos los puntos de su dominio; es por esto por lo que en el presente tema trataremos de caracterizar dichos conceptos mediante derivadas.

FUNCIONES MONÓTONAS.

Recordemos que una función es monótona cuando es creciente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente.

Sea f una función definida de D en R y sea a un punto perteneciente a D.

$$f \text{ es} \left\{ \begin{array}{l} creciente \\ estrictamente\ creciente \\ decreciente \\ estrictamente\ decreciente \end{array} \right\} \text{en } a \in D \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in V(a,r) : \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \left\{ \begin{array}{l} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \end{array} \right.$$

Tratemos ahora de caracterizar esta monotonía para funciones derivables.

De la tasa de variación media (T.V.M.) que aparece en la definición de la monotonía, podemos pasar a la derivada sólo con tomar límites. A partir de aquí, podemos enunciar el siguiente

TEOREMA.

Sea f una función derivable en un punto $a \in D$. Si $f'(a) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en el punto a.

Un teorema análogo podríamos enunciar para el decrecimiento estricto.

Sea f una función derivable en un punto $a \in D$. Si $f'(a) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en el punto a.

Teniendo en cuenta los teoremas anteriores, para estudiar la monotonía de una función sólo tendremos que calcular su derivada y buscar los intervalos dónde ésta sea positiva (función estrictamente creciente) y dónde sea negativa (función estrictamente decreciente).

Si $f' > 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f es estrictamente creciente en el intervalo.

Si $f' < 0$ en un intervalo $\Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en el intervalo.

En los puntos cuya derivada es nula no se puede afirmar nada, ya que la función puede ser creciente, decreciente o ninguna de las dos cosas. El siguiente criterio nos ayuda a estudiar este caso:

Sea $x = a$ un punto donde una función f tiene derivadas hasta el orden $2n + 1$ (orden impar) en un entorno de dicho punto y que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{2n)}(a) = 0$.

Si $f^{2n+1)}(a) > 0$, entonces la función es estrictamente creciente en $x = a$.
Si $f^{2n+1)}(a) < 0$, entonces la función es estrictamente decreciente en $x = a$.

EJEMPLOS.

1. **Estudiar la monotonía de la función $f(x) = x^2 - 4$.**

   Calculamos la derivada de la función dada: $f'(x) = 2x$.
   Entonces:
   - Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty,0)$.
   - Si $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.
   - Si $x = 0$ no se puede afirmar nada.

2. **Estudiar los intervalos de monotonía de la función $f(x) = e^x$.**

   La derivada de la función dada es $f'(x) = e^x$.
   Para cualquier valor $x \in R$ se verifica que $e^x > 0$. Luego, $f'(x) > 0$ en toda la recta real y nuestra función será creciente en todo su dominio.

3. **Estudiar la monotonía de la función $f(x) = Lx$.**

   Calculamos su derivada: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

   Como la función logarítmica sólo está definida para valores de $x > 0$, tendremos que $f'(x) > 0$ y la función será estrictamente creciente en todo su dominio.

4. **Estudiar los intervalos de monotonía de la función $f(x) = x^3$.**

   Su derivada es $f'(x) = 3x^2$. Por tanto, la función es estrictamente creciente para cualquier $x \neq 0$. En $x = 0$ no se puede aplicar el criterio anterior y tendremos que ver cual es la primera derivada que no se anula en él.
   Tenemos que $f'(0) = f''(0) = 0$ y $f'''(0) = 6$. Aplicando el criterio segundo, como la primera derivada que no se anula en el punto $x = 0$ es de orden impar y es positiva, la función es estrictamente creciente en dicho punto y, por tanto, en todo R.

5. **Estudiar los intervalos de monotonía de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x+2}$.**

   Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = \dfrac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2}$

   Puesto que el denominador siempre es positivo, el signo de la derivada depende exclusivamente del signo del numerador. Como éste se anula en los puntos $\left\{\begin{matrix} x = -4 \\ x = 0 \end{matrix}\right\}$, el dominio se nos divide en los siguientes trozos: $(-\infty,-4)$, $(-4,-2)$, $(-2,0)$ y $(0,+\infty)$.
   Estudiemos el signo de la función derivada en cada uno de los intervalos obtenidos:
   $\forall x \in (-\infty,-4) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,-4)$.
   $\forall x \in (-4,-2) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-4,-2)$.
   $\forall x \in (-2,0) : f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-2,0)$.
   $\forall x \in (0,+\infty) : f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en el intervalo $(0,+\infty)$.

PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN (MÁXIMOS Y MÍNIMOS RELATIVOS).

Consideremos una función $f : D \longrightarrow R \ / \ x \in D \longrightarrow f(x) \in R.$

- Decimos que f tiene un máximo absoluto en $x_0 \in D$ si se verifica que $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in D.$
- Decimos que f tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in D$ si se verifica que $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D.$
- Decimos que f tiene un máximo relativo en $x_0 \in D$ si se verifica que $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D.$
- Decimos que f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in D$ si se verifica que $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap D.$

Una función puede tener varios máximos o mínimos relativos o carecer de ellos. Todo máximo (mínimo) absoluto es al mismo tiempo relativo, pero no al contrario.

La palabra relativo indica que se compara el valor $f(x)$ con los valores que toma la función en un entorno de x_0, mientras que los máximos y mínimos absolutos se refieren a todo el dominio.

Los máximos y mínimos relativos reciben el nombre de **PUNTOS CRÍTICOS, PUNTOS ESTACIONARIOS o EXTREMOS.**

El estudio de los extremos de una función es, en general, un problema complicado ya que no existen métodos generales para calcularlos. Sin embargo, para funciones derivables podemos hallarlos mediante un procedimiento bastante sencillo como veremos a continuación:

TEOREMA.

Sea $f : D \longrightarrow R$. Si f alcanza un extremo en $x_0 \in D$ y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

En efecto, si $f'(x_0)$ no se anula en x_0, $f'(x_0) \neq 0$, entonces la función es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en el punto x_0 y no podría cumplirse la condición de máximo o mínimo.

Geométricamente, esta condición expresa que la tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ a la gráfica de la función f es paralela al eje de abscisas, aunque puede suceder que exista tangente horizontal en un punto sin que exista máximo o mínimo.

Este teorema nos permite calcular los puntos donde puede haber un máximo o un mínimo, sin más que resolver la ecuación $f'(x_0) = 0$. Obtenidos estos puntos, los siguientes criterios nos ayudan a decidir si en ellos existe un máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas.

CRITERIO 1: Variación de la función en un entorno del punto.

Sea x_0 un punto donde puede existir un máximo o un mínimo relativo. Se trata de estudiar el comportamiento de la función en un entorno del punto:

Este criterio es la aplicación directa de la definición de máximo y mínimo relativo y, dada su generalidad, puede aplicarse a puntos en los cuales no exista derivada de la función.

CRITERIO 2: Variación de la derivada primera en el entorno del punto.

Sea x_0 un punto donde la función puede alcanzar un máximo o un mínimo y $h > 0$ un valor suficientemente pequeño:

- **Si $f'(x_0 - h) > 0$ (*f* creciente a la izquierda de x_0) y $f'(x_0 + h) < 0$ (*f* decreciente a la derecha de x_0), entonces la función alcanza un máximo relativo en $x = x_0$.**
- **Si $f'(x_0 - h) <$ (*f* decreciente a la izquierda de x_0) y $f'(x_0 + h) > 0$ (*f* creciente a la derecha de x_0), entonces la función alcanza un mínimo relativo en $x = x_0$.**

CRITERIO 3: Valor de la derivada segunda en el punto.

Sea $f : D \longrightarrow R$ y x_0 un punto de *D*. Si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), entonces *f* posee en $x = x_0$ un máximo (mínimo) relativo.

En efecto, si $f''(x_0) < 0,$ la función f' es estrictamente decreciente en el punto x_0 y como en ese punto se anula f', a la izquierda será positiva y a la derecha, negativa. Por tanto, a la izquierda de x_0 la función *f* será estrictamente creciente y a la derecha de x_0 será estrictamente decreciente por ser f' negativa. En consecuencia, la función tendrá un máximo relativo en el punto $x = x_0$.

Si $f''(x_0) < 0,$ la demostración es análoga.

Si $f''(x_0) = 0,$ no puede aplicarse el criterio anterior y debemos recurrir a criterios anteriores o aplicar el siguiente criterio general

CRITERIO 4: Criterio de Taylor.

Sea x_0 un punto del dominio de la función *f*. Consideremos que *f* es derivable hasta el orden 2n (orden par) en un entorno de dicho punto y, además, se verifica que

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1}(x_0) = 0$$

Entonces,

- Si $f^{(2n}(x_0) < 0,$ la función alcanza un máximo relativo en $x = x_0$.
- Si $f^{(2n}(x_0) < 0,$ la función alcanza un mínimo relativo en $x = x_0$.

EJEMPLOS.

1. **Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^4 - 2x^3$.**

   Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$ y vemos donde se anula

$$4x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0(doble) \\ 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

   Para estudiar cuales corresponden a máximos y cuales corresponden a mínimos aplicaremos el criterio de la derivada primera con lo que al mismo tiempo se estudian los intervalos de crecimiento o decrecimiento. El único punto donde la función derivada cambia de signo es $x = \frac{3}{2}$ y este punto descompone el dominio en dos intervalos $(-\infty, \frac{3}{2})$ y $(\frac{3}{2}, +\infty)$.

   En $(-\infty, \frac{3}{2})$ se verifica que $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en dicho intervalo.

   En $(\frac{3}{2}, +\infty)$ se verifica que $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en dicho intervalo.

   En consecuencia, en el punto $x = \frac{3}{2}$ la función f tiene un mínimo relativo.

   NOTA: Decimos que en el punto $x = 0$ la función derivada no cambia de signo porque en él tiene un cero doble con lo que cambiaría dos veces de signo y se quedaría con el mismo signo que tenía antes de 0.

2. **Calcular los máximos y mínimos de la función $f(x) = x.Lx$.**

   Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = 1.Lx + x \cdot \frac{1}{x} = Lx + 1$

   Anulamos la función derivada para calcular donde la función tiene los posibles extremos:

$$Lx + 1 = 0 \Rightarrow Lx = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

   Para determinar si este punto que anula la derivada corresponde con un máximo o un mínimo, aplicaremos en este caso el criterio de la derivada segunda. Empezaremos calculándola:

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

   Si sustituimos el valor que anula la derivada primera nos encontraremos que: $f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0$ y, por tanto, la función tiene un mínimo en $x = e^{-1}$.

3. **Determina el parámetro k para que el mínimo de la función $f(x) = x^2 + 2x + k$ sea igual a 8.**

   Calculamos el punto donde la función tendrá el extremo; este punto tendrá que anular la derivada de función: $f'(x) = 2x + 2 \Rightarrow 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = -1$

   Como nos dicen que el valor mínimo es 8, tendremos: $f(-1) = 8 \Rightarrow 1 - 2 + k = 8 \Rightarrow k = 9$

   En consecuencia, nuestra función será: $f(x) = x^2 + 2x + 9$

Máximos y mínimos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado, sin ramas infinitas.

El problema general suele adoptar la siguiente forma:

¿Para qué valor de x la función $f(x)$ definida en el intervalo $[a,b]$ toma el valor máximo o mínimo?

Un aspecto a tener en cuenta es si f tiene alguna rama infinita en $[a,b]$, es decir, si hay algún punto $c \in [a,b]$ para el cual se verifica que $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$. En este caso, lógicamente, no hay máximo o mínimo.

Consideremos que no se da este caso. Entonces el máximo absoluto estará entre los máximos relativos y éstos sabemos que son puntos donde se anula la derivada de la función, puntos sin derivada o los extremos del intervalo.

En consecuencia, para obtener el máximo absoluto de una función $y = f(x)$ en $[a,b]$, comprobaremos primeramente que no existen ramas infinitas de la función en dicho intervalo y después obtendremos:

- Puntos donde se anule la derivada resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.
- Puntos donde la función no es derivable o no es continua.
- Extremos a y b del intervalo.

Una vez obtenidos todos estos puntos, calculamos el valor de la función en cada uno de ellos. El mayor será el máximo absoluto de la función en el intervalo.

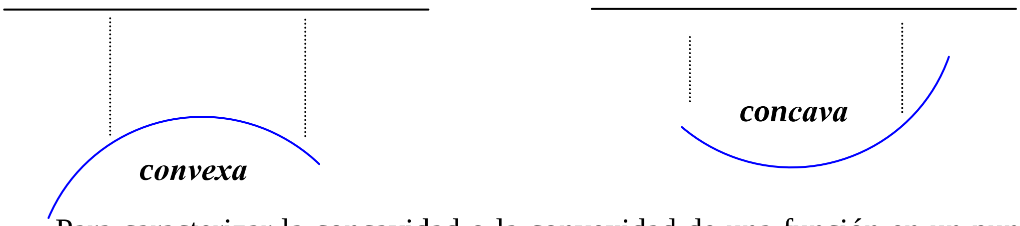
Para el mínimo absoluto procederemos de forma análoga.

CURVATURA. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD.

La idea de lo que, en la vida real, llamamos cóncavo o convexo es muy clara:

cóncavo $\longleftrightarrow$ ***hueco*** **convexo** $\longleftrightarrow$ ***abultado***

En el momento de aplicar estos conceptos a una curva, habrá que adoptar algún criterio para mirar la curva: adoptaremos el criterio de mirar la curva desde arriba, desde la parte superior del eje de ordenadas *OY*.



Para caracterizar la concavidad o la convexidad de una función en un punto, a, vamos a estudiar el comportamiento de la curva con respecto a las tangentes en cada uno de los puntos del dominio de la función.

Podemos observar que las curvas cóncavas están por encima de la tangente, mientras que las convexas están por debajo. Esto quiere decir que la concavidad o convexidad de una función dependerá del signo de la diferencia

ordenada de la curva – ordenada de la tangente

en las proximidades de a; es decir,

$$f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)\right]$$

A partir de aquí podemos dar la siguiente definición:

Una función $y=f(x)$ derivable en a, es **convexa en** $\boldsymbol{a}$, si se verifica que

$$f(x)-\left[f(a)+f'(a)(x-a)\right]<0$$

En caso de que la diferencia sea positiva se dice que la función es **cóncava.**

La derivada primera y segunda de la función *f*, si es que existen, nos permiten estudiar la concavidad o convexidad de la función *f*, tal como se indica en los siguientes criterios:

CRITERIO 1. ***Derivada primera.***

Sea *f* una función derivable en el intervalo *I*:

- Si f' es creciente en el intervalo *I*, la función *f* es convexa en *I*.
- Si f' es decreciente en el intervalo *I*, la función *f* es cóncava en *I*.

Utilizando el criterio para que f' sea creciente o decreciente, obtenemos el siguiente

CRITERIO 2: ***Derivada segunda.***

Sea *f* una función con derivada segunda en el intervalo *I*.

- Si $f''<0$ en el intervalo *I*, la función *f* es cóncava en *I*.
- Si $f''>0$ en el intervalo *I*, la función *f* es convexa en *I*.

En los puntos en los que la derivada segunda es 0 no se puede afirmar nada del comportamiento de la función.

Si $f'(x)=0$ se utiliza el criterio de Taylor para máximos y mínimos, y si $f'(x)\neq 0$ el criterio siguiente:

CRITERIO 3: ***Criterio de Taylor***.

Sea a un punto donde la función *f* puede ser cóncava o convexa. Supongamos que f es derivable hasta el orden 2*n* (orden par) en un entorno de *a* y, además, que

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{y} \quad f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(2n-1}(a) = 0$$

- Si $f^{(2n}(a) < 0,$ entonces la función es cóncava en *a*.
- Si $f^{(2n}(a) > 0,$ entonces la función es convexa en *a*.

PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Los puntos de inflexión tienen un comportamiento similar respecto de la curvatura que los máximos y mínimos relativos respecto de la monotonía de una función.

Una función *f* tiene un punto de inflexión en *a* si en dicho punto la función pasa de convexa a cóncava o de cóncava a convexa.

- Si la función pasa de convexa a cóncava diremos que *a* es un punto de inflexión convexo-cóncavo.
- Si la función pasa de cóncava a convexa diremos que *a* es un punto de inflexión cóncavo-convexo.

Si la función es derivable en *a*, la tangente en "*a*" a la gráfica de la función deja una parte de la gráfica por encima y otra por debajo. Con esto podríamos dar otra definición equivalente para el caso de funciones derivables:

Se dice que una función *f* tiene un punto de inflexión en *a*, si la tangente en el punto $(a, f(a))$ atraviesa la gráfica de la función.

En el caso de que la función *f* sea derivable al menos dos veces, los valores candidatos a puntos de inflexión son aquellos que anulan la segunda derivada, como nos indica el siguiente:

TEOREMA.

Sea $f : D \longrightarrow R$. Si *f* tiene un punto de inflexión en $a \in D$ y *f* es derivable al menos dos veces en *a*, entonces $f''(a) = 0$.

En efecto, si $f''(a) \neq 0$ entonces la función sería estrictamente cóncava o estrictamente convexa en el punto a y no podría cumplirse la condición de punto de inflexión.

Este teorema nos permite hallar los puntos en los que la función f puede tener un punto de inflexión. Las abscisas de estos puntos son las raíces o ceros de la ecuación $f''(x) = 0.$

La condición $f''(a) = 0$ es necesaria para la existencia de un punto de inflexión, pero no es suficiente. Puede ocurrir que $f''(a) = 0$ y que, sin embargo, ese punto no sea de inflexión, como ocurre en la función $f(x) = x^4$ que tiene derivada segunda nula en $x = 0$, y en ese punto la función tiene un mínimo.

Obtenidos los puntos en donde se anula $f'',$ veamos algunos criterios que nos permitirán decidir si se trata de un punto de inflexión cóncavo-convexo o convexo-cóncavo o ninguna de las dos cosas.

CRITERIO 1: **Variación del signo de la derivada segunda.**

Sea $f: D \longrightarrow R$ tal que $f''(a) = 0$.

Si a la izquierda de $x = a$ es $f'' < 0$ (función cóncava) y a la derecha de $x = a$ es $f'' > 0$ (función convexa), entonces $x = a$ es un punto de inflexión cóncavo-convexo.

CRITERIO 2: **Valor de la derivada tercera.**

Sea $f: D \longrightarrow R$ una función derivable al menos hasta el orden tres en $a \in D$.

- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) > 0$, entonces la función tiene en $x = a$ un punto de inflexión cóncavo-convexo.
- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) < 0$, entonces la función tiene en $x = a$ un punto de inflexión convexo-cóncavo.

Si $f'''(a) = 0$, no puede aplicarse este criterio y tendríamos que aplicar el criterio de la derivada segunda o utilizar una generalización del criterio de la derivada tercera que nos queda como sigue:

CRITERIO 3: **Criterio de Taylor.**

Sea a un punto donde la función f puede tener un punto de inflexión. Supongamos que f es derivable hasta el orden $2n+1$ (orden impar) en un entorno de a y, además, que $f'(a) \neq 0$ y $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{2n)}(a) = 0$.

- Si $f^{2n+1)}(a) > 0$, entonces la función tiene un punto de inflexión cóncavo-convexo en a.
- Si $f^{2n+1)}(a) < 0$, entonces la función tiene un punto de inflexión convexo-cóncavo en a.

OPTIMIZACION DE FUNCIONES.

El cálculo de máximos y mínimos mediante derivadas permite resolver de una manera sencilla muchos problemas en los que se trata de optimizar una función.

Para resolverlos seguiremos el siguiente esquema general:

- Mediante los datos del problema se construye la función que hay que maximizar o minimizar. La mayor parte de las veces nos quedará en función de dos o más variables.
- Si la función tiene más de una variable debemos relacionar éstas dos ecuaciones a fin de conseguir expresar la función inicial utilizando una sola variable.
- Se calculan los máximos y mínimos de esta función.
- Se interpretan los resultados obtenidos rechazando aquellos que por la naturaleza del problema no sean posibles.

EJEMPLOS.

1. **Hallar dos números cuya suma sea 20 y su producto el mayor posible.**

   Supongamos que los números buscados son x e y. Se tendrá que verificar que

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ P(x, y) = x.y = \text{máximo} \end{array}\right\}$$

   Entonces, despejamos una de las dos variables y sustituimos en la función a optimizar, quedándonos ésta en función de una sola variable:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 20 \\ P(x, y) = x.y = \text{máximo} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 20 - x \\ P(x) = x.(20 - x) \Rightarrow P(x) = 20x - x^2 \end{array}\right.$$

   Obtenida la función a optimizar dependiendo de una sola variable, buscaremos los extremos de esta función:

$$P'(x) = 20 - 2x \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{2} = 10$$

   Por último, comprobamos si este valor corresponde con un máximo o con un mínimo:

$$P''(x) = -2 \Rightarrow P''(10) = -2 < 0$$

   Luego, para el valor $x = 10$, la función alcanza un máximo y los dos números en los que se puede descomponer el número 20 de forma que el producto de ellos sea máximo serán $x = 10$ e $y = 10$.

2. **Calcular las dimensiones del mayor rectángulo cuyo perímetro es de 40 m**

   El mayor rectángulo es el de mayor área. Si suponemos que las dimensiones del rectángulo son x e y, tendríamos:

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{Perímetro}: & 2x + 2y = 40 \\ \textit{Área}: & S(x, y) = x.y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y = 20 \\ S(x, y) = x.y \end{array}\right.$$

   Operando igual que en el ejercicio anterior, obtenemos: despejamos una de las dos variables y sustituimos en la función a optimizar, quedándonos ésta en función de una sola variable:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=20 \\ S(x,y)=x.y=\text{máximo} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y=20-x \\ S(x)=x.(20-x) \Rightarrow P(x)=20x-x^2 \end{cases}$$

Obtenida la función a optimizar dependiendo de una sola variable, buscaremos los extremos de esta función:

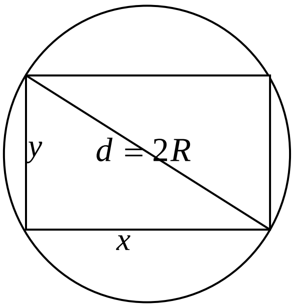
$$S'(x)=20-2x \Rightarrow 20-2x=0 \Rightarrow x=\frac{20}{2}=10$$

Por último, comprobamos si este valor corresponde con un máximo o con un mínimo:

$S''(x)=-2 \Rightarrow S''(10)=-2<0$

Luego, para el valor x = 10, la función alcanza un máximo y el rectángulo buscado es un cuadrado de lado 10 m.

3. **De todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio R, calcular las dimensiones del que tenga área máxima. Razona el proceso.**



Suponiendo que las dimensiones del rectángulo inscrito en la circunferencia son x e y, el área de dicho rectángulo nos vendrá dada por: $S(x,y)=x.y$

La relación entre las dos variables habrá que buscarla a través del diámetro de la circunferencia, ya que éste con los lados del rectángulo forma un triángulo rectángulo:

$$x^2+y^2=4R^2$$

Operaremos como en los casos anteriores: en la relación entre las dos variables despejaremos una de ellas para dejar la función a optimizar dependiendo de una sola variable:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=4R^2 \\ S(x,y)=x.y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{4R^2-x^2} \\ S(x)=x\cdot\sqrt{4R^2-x^2} \end{cases}$$

Calculamos la derivada primera y vemos donde se anula:

$$S'(x)=\sqrt{4R^2-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{(\sqrt{4R^2-x^2})^2-x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=\frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4R^2-2x^2}{\sqrt{4R^2-x^2}}=0 \Rightarrow 4R^2-2x^2=0 \Rightarrow 2R^2-x^2=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2R^2}=\pm R\sqrt{2}$$

Veamos que valor corresponde con el máximo: calculamos la derivada segunda de la función:

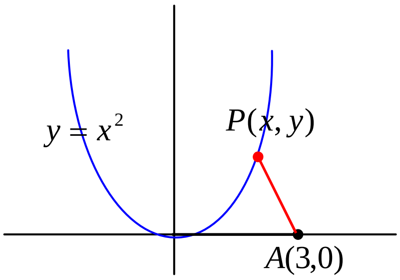
$$S''(x)=\frac{-4x\sqrt{4R^2-x^2}-(4R^2-2x^2)\cdot\dfrac{-2x}{2\sqrt{4R^2-x^2}}}{(4R^2-x^2)}=\frac{-4x\sqrt{4R^2-x^2}+\dfrac{2x(2R^2-x^2)}{\sqrt{4R^2-x^2}}}{(4R^2-x^2)}$$

Sustituyendo en esta derivada los valores que anulaban la derivada primera obtenemos:

$$S''(R\sqrt{2})<0 \quad \Rightarrow \quad \text{máximo} \quad \text{y} \qquad S''(-R\sqrt{2})>0 \quad \Rightarrow \quad \text{mínimo}$$

Por tanto, para obtener área máxima el valor de x deberá ser $x = R\sqrt{2}$ que sustituido donde tenemos despejada la variable y obtenemos $y = R\sqrt{2}$.

4. **Determina el punto de la curva cuya ecuación es $y = x^2$ que está más cerca del punto $A = (3,0)$.**



Consideremos que el punto de la curva que está más cerca de A es el punto $P(x, y)$ que por ser de la curva verificará su ecuación, es decir que $y = x^2$.

Por otra parte, como es el que está más cerca de A, la distancia entre ellos tiene que ser mínima (la menor posible):

$$d(A,P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} \equiv \text{mínima} \quad \Rightarrow \quad d(A,P) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

Teniendo en cuenta la relación entre las dos variables nos queda:

$$d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + x^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d'(x) = \frac{2(x-3) + 4x^3}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = \frac{(x-3) + 2x^3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}$$

Anulamos la derivada: $\dfrac{(x-3) + 2x^3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = 0 \Rightarrow (x-3) + 2x^3 = 0 \Rightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \text{ no tiene solución real.} \end{cases}$$

Calculamos la segunda derivada:

$$d''(x) = \frac{(1 + 6x^2)\sqrt{(x-3)^2 + x^4} - (2x^3 + x - 3)\dfrac{(x-3) + 2x^3}{\sqrt{(x-3)^2 + x^4}}}{(x-3)^2 + x^4}$$

En el punto $x = 1$: $\quad d''(1) = \dfrac{7\sqrt{5}}{5} > 0 \Rightarrow$ corresponde con un mínimo.

En consecuencia, el punto de la curva dada que está más cerca de A es el punto $P(1,1)$.

5. **Demuestra que la suma de un número real positivo no nulo y su inverso es mayor o igual que 2.**

Sea x un número real positivo no nulo y sea f la función definida de la forma $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Si queremos demostrar que los valores que toma esta función son mayores o iguales que 2, quiere decir que el valor mínimo que toma la función es 2. Veamos que verdaderamente es así y para ello calcularemos, primeramente, donde alcanza el valor mínimo y si éste es igual a 2:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Hemos encontrado dos valores que anulan la derivada de la función de los cuales eliminamos el valor negativo ya que x era un número real positivo. Para el valor $x = 1$ veamos que signo tiene la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \text{tiene un mínimo.}$$

El valor que toma la función para $x = 1$ será: $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ que es el valor mínimo que toma la función.

ESQUEMA A SEGUIR PARA LA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Propiedades de *f* obtenidas directamente:

1. **Dominio y Recorrido de la función.**
2. **Simetrías:**
   a) **Simetría respecto del eje *OY*** (función par): $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$
   b) **Simetría respecto del origen *O*** (función impar): $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$
3. **Periodicidad:** $f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$ **donde** T **= periodo**
4. **Puntos de corte con los ejes:**
   a) **Con el eje *OX***: hacemos $y = 0$ (son los ceros de la función)
   b) **Con el eje *OY***: hacemos $x = 0$ y obtenemos un punto único $(0, f(0))$
5. **Regiones de existencia (zonas) de la función:**
   a) Intervalos de positividad: $f > 0$
   b) Intervalos de negatividad: $f < 0$
6. **Ramas infinitas: (puntos en el infinito)**
   a) Punto de partida de la gráfica: $(-\infty, ?)$
   b) Punto de llegada de la gráfica: $(+\infty, ?)$
7. **Asíntotas:**
   a) Horizontales
   b) Verticales
   c) Oblicuas
8. **Puntos de discontinuidad.**

Propiedades de *f* obtenidas por las derivadas sucesivas.

9. **Monotonía:**
   a) Intervalos de crecimiento........................ $f' > 0$
   b) Intervalos de decrecimiento.................... $f' < 0$
   c) Puntos críticos (máximos y mínimos)...... $f' = 0$ y $f'' \neq 0$
10. **Curvatura:**
    a) Intervalos de concavidad......................... $f'' < 0$
    b) Intervalos de convexidad......................... $f'' > 0$
    c) Puntos de inflexión................................. $f'' = 0$ y $f''' \neq 0$