TEMA 1 – LOS NÚMEROS REALES

1.1 – LOS NÚMEROS REALES. LA RECTA REAL

INTRODUCCIÓN:

Los **números racionales**:

- Se caracterizan porque pueden expresarse:
  - En forma de ***fracción***, es decir, como cociente de dos números enteros: $x \in Q \Leftrightarrow a, b \in Z$ tales que $x = \frac{a}{b}$ $b \neq 0$
  - En forma ***decimal***: O bien son enteros o bien tienen expresión decimal **finita o periódica.**
- El conjunto de todos los números racionales se designa por **Q**. El conjunto **Q es denso en R** (al situar todos los números racionales sobre la recta numérica la ocupan densamente). Esto quiere decir: Entre dos números racionales hay infinitos números racionales. (si $x_1, x_2 \in Q \Rightarrow$ El punto medio: $\frac{x_1 + x_2}{2} \in Q$)

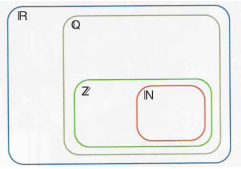
No obstante, en la recta numérica hay infinitos puntos no ocupados por números racionales. A cada uno de estos puntos le corresponde un número irracional.

Los **número irracionales**:

- Se caracterizan porque:
  - **No pueden expresarse en forma de fracción.**
  - **Su expresión decimal tiene infinitas cifras no periódicas**.
- El conjunto de todos los números irracionales se designa por **I**.

Tanto los números racionales como los irracionales se llaman **números reales**. El conjunto de los números reales se designa por **R.** Los números reales llenan la recta numérica por eso se la llama **recta real**.

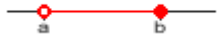
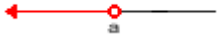
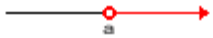
ESQUEMA DE CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS REALES



$$\text{REALES (R)}\begin{cases}\text{RACIONALES (Q)}\begin{cases}\text{ENTEROS (Z)}\begin{cases}\text{NATURALES (N)} \Rightarrow 0;4;\frac{24}{6};\sqrt{81}.....\\ \text{ENTEROS NO NATURALES} \Rightarrow -11;\frac{-24}{4};\sqrt[3]{-8}....\\ \text{(Enteros negativos)}\end{cases}\\ \text{FRACCIONARIOS (Racionales no enteros)}\begin{cases}\text{Fracciones}: \frac{3}{4}, \frac{-5}{8}...\\ \text{Números decimales}\begin{cases}\text{Exactos}: 0{,}31;...\\ \text{Periódicos}\begin{cases}\text{Puros}: 7{,}\widehat{1};...\\ \text{Mixtos}: 7{,}3\widehat{1},...\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ \text{IRRACIONALES (I)} \Rightarrow \sqrt{2};-\sqrt{3};\sqrt[3]{5};\pi, \text{decimales no periódicos.....}\end{cases}$$

INTERVALOS Y SEMIRRECTAS

Sirven para expresar tramos de la recta real

NOMBRE	SÍMBOLO	SIGNIFICADO	REPRESENTACIÓN
Intervalo abierto	(a,b)	{ x / a < x < b } Nº comprendidos entre a y b	
Intervalo cerrado	[a,b]	{ x / a ≤ x ≤ b } Nº comprendidos entre a y b, éstos incluidos.	
Intervalo semiabierto	(a,b]	{ x / a < x ≤ b } Nº comprendidos entre a y b, incluido b	
	[a,b)	{ x / a ≤ x < b } Nº comprendidos entre a y b, incluido a	
Semirrecta	(-∞,a)	{ x / x < a } Números menores que a	
	(-∞,a]	{ x / x ≤ a } Nº menores o iguales que a	
	(a,∞)	{ x / a < x } Números mayores que a	
	[a,∞)	{ x / a ≤ x } Nº mayores o iguales que a	

Nota : Si queremos nombrar un conjunto de puntos formados por dos o más de estos intervalos, se utiliza el signo ∪ (unión) entre ellos.

1.2 – VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL

DEFINICIÓN

El **valor absoluto de un número real**, a, es el propio número a, si es positivo, o su opuesto, -a, si es negativo: $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

(Es decir, consiste en convertirlo en positivo)

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

- $|x-a| = b \Rightarrow \begin{cases} x-a=b \Rightarrow x=a+b \\ x-a=-b \Rightarrow x=a-b \end{cases} \Rightarrow \{a\text{-}b, a+b\}$ (Dos puntos concretos)
- $|x-a| < b \Rightarrow \begin{cases} x-a=b \Rightarrow x=a+b \\ x-a=-b \Rightarrow x=a-b \end{cases} \Rightarrow (a\text{-}b, a+b)$ (El interior)
- $|x-a| \geq b \Rightarrow \begin{cases} x-a=b \Rightarrow x=a+b \\ x-a=-b \Rightarrow x=a-b \end{cases} \Rightarrow (-\infty, a\text{-}b] \cup [a+b, +\infty)$ (El exterior)

1.3 – RADICALES. PROPIEDADES

DEFINICIÓN DE RAIZ N-ÉSIMA

Se llama **raíz n-ésima** de un número a y se escribe $\sqrt[n]{a}$, a un número b que cumple la siguiente condición: $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$

$\sqrt[n]{a}$ se llama **radical**, a **radicando** y n **índice** de la raíz.

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES

Si $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ existe cualquiera que sea n
Si $a < 0$, sólo existe su raíz de índice impar.

FORMA EXPONENCIAL DE LOS RADICALES

Forma exponencial de radicales $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

PROPIEDADES DE LOS RADICALES

- $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$ (Para simplificar radicales o reducir a común índice)
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

OPERACIONES CON RADICALES

- **Suma y resta de radicales** : Dos radicales distintos no pueden sumarse si no es obteniendo sus expresiones decimales aproximadas. Sólo puede sumarse radicales idénticos.

- **Producto y cociente de radicales** : Para poder multiplicar o dividir dos radicales deben tener el mismo índice en la raíz, es decir, debemos expresarlas con el m.c.m de sus índices. (Aplicar propiedades 1 y 4 del apartado anterior).

- **Racionalización de denominadores** : A veces conviene suprimir las raíces del denominador. Para ello hay que multiplicarlo por la expresión adecuada. Naturalmente, el numerador también se multiplicará por esa misma expresión.

  - Para suprimir una raíz cuadrada (aunque esté multiplicada por un número), basta multiplicar numerador y denominador por dicha raíz.
  - Para suprimir una raíz n-ésima (aunque esté multiplicada por un número), se multiplica numerador y denominador por otra raíz n-ésima tal que se complete en el radicando una potencia n-ésima.
  - En una suma de raíces cuadradas, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, se suprimen los radicales multiplicando por el conjugado $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ y viceversa.

1.4 – LOGARITMOS

LOGARITMOS EN BASE CUALQUIERA

Si a > 0 y a ≠ 1, se llama **logaritmo en base a** de p, y se designa $\log_a p$, al exponente al que hay que elevar la base a para obtener p. $\log_a p = x \Leftrightarrow a^x = p$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

- El logaritmo de la base es 1 : $\log_a a = 1$
- El logaritmo de 1 es 0 : $\log_a 1 = 0$
- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base de la potencia: $\log_a p^n = n.\log_a p$
- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos:
  $\log_a (p.q) = \log_a p + \log_a q$
- El logaritmo de un cociente es igual a la resta de los logaritmos:
  $\log_a (p/q) = \log_a p - \log_a q$
- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice :
  $\log_a \sqrt[n]{p} = \dfrac{\log_a p}{n}$
- **Cambio de base** : El logaritmo en base a de un número se puede obtener a partir de logaritmos de logaritmos decimales. $\log_a p = \dfrac{\log_c p}{\log_c a}$

ALGUNOS LOGARITMOS IMPORTANTES

Se llama **logaritmo decimal** de un número p y se designa por **log p**, al exponente al que hay que elevar el 10 para obtener p.

$$\log p = x \Leftrightarrow 10^x = p$$

La tecla "log" nos da el logaritmo decimal del número que escribamos en la pantalla a continuación.

Se llama **logaritmo neperiano** de un número p y se designa por **Ln p**, al exponente al que hay que elevar el número e para obtener p.

$$\text{Ln } p = x \Leftrightarrow e^x = p$$

La tecla "Ln" nos da el logaritmo neperiano del número que escribamos en la pantalla a continuación.

Un logaritmo en otra base "a" cualquiera (distinta de 10 o e) se puede obtener a partir de logaritmos de logaritmos en cualquier base (c) (En particular, base 10 o base e).

$$\log_a p = \frac{\log_c p}{\log_c a} = \frac{\log p}{\log a} = \frac{Ln\ p}{Ln\ a}$$

1.5 – EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES. NÚMEROS APROXIMADOS.

EXPRESIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS REALES. ERRORES Y COTAS

Al expresar un número real con muchas o infinitas cifras decimales, utilizamos expresiones decimales aproximadas, es decir, recurrimos al redondeo. Al realizar estas aproximaciones cometemos errores.

Error absoluto = |Valor real – Valor de medición|

Error relativo = $\frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor real}}$

Cotas de los errores: Números mayores o iguales que el valor absoluto de los errores:

|Error Absoluto| ≤ k |Error relativo| ≤ k'

CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Cuando utilizamos los números decimales para expresar mediciones concretas, se deben dar con una cantidad adecuada de cifras significativas.

Se llaman **cifras significativas** a aquellas con las que se expresa un número aproximado. Sólo de deben utilizar aquellas cuya exactitud nos conste.

El error absoluto suele ser menor que 5 unidades del lugar siguiente al de la última cifra significativa utilizada.

El error relativo es tanto menor, cuanto más cifras significativas se utilicen.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

La notación científica se utiliza para expresar números muy grandes o muy pequeños.

Un número puesto en notación científica consta de :

- Una parte entera formada por una sola cifra que no es el cero(la de las unidades)
- El resto de las cifras significativas puestas como parte decimal.
- Una potencia de base 10 que da el orden de magnitud del número.

$$N = a\,,\,bcd..... \times 10^n$$

a = Parte entera (sólo una cifra)
bcd..... = Parte decimal
10^n = Potencia entera de base 10

Si n es positivo, el número N es "grande"
Si n es negativo, el número N es "pequeño"

Operaciones con números en notación científica

El producto y el cociente son inmediatos, teniendo en cuenta:

$10^b . 10^c = 10^{b+c}$ $\qquad$ $10^b : 10^c = 10^{b-c}$

En sumas y en restas hay que preparar los sumandos de modo que tengan todos la misma potencia de base 10

Calculadora para la notación científica

- **Interpretación** : 5.74901^{09} significa 5,74901 x 10^9
- **Escritura**: 5,74901 x 10^9 $\Rightarrow$ 5,74901 EXP 9
  2,94 x 10^{-13} $\Rightarrow$ 2,94 EXP 13 ±
- **Modo científico (SCI)** : Hace que la calculadora trabaje siempre con números en notación científica y, además, con la cantidad de cifras significativas que previamente le hayamos indicado. (MODE 8 4 $\Rightarrow$ 0.000^{00}) Para volver a modo normal MODE 9 .

1.5 – FACTORIALES Y NÚMEROS COMBINATORIOS.

FACTORIAL DE UN NÚMERO NATURAL

Es el producto de los "n" factores consecutivos desde "n" hasta 1. El **factorial de un número** se denota por **n!**.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$0! = 1$$

Ejemplo

Calcular factorial de 5. $\qquad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

NÚMEROS COMBINATORIOS

Un **número combinatorio** es un número natural de la forma $\binom{n}{m}$, donde $n \geqslant m$ y se lee "n sobre m". Para obtenerlo se aplica la siguiente fórmula:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS COMBINATORIOS

I. $\binom{m}{0} = 1, \ \binom{m}{m} = 1$

II. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ Pues, si disponemos de m elementos, cada vez que escogemos n nos quedan $m-n$.

III. $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$

TRIÁNGULO DE TARTAGLIA

Tartaglia (se lee *Tartalla*) fue un matemático italiano del siglo XVI. Su verdadero nombre era Niccolò Fontana. En una guerra recibió un golpe, a consecuencia del cual quedó tartamudo. Su apodo, Tartaglia (tartaja), se hizo tan popular que él mismo firmaba así sus libros.

Pues bien, para resaltar las propiedades de los números combinatorios, a este matemático se le ocurrió ponerlos del siguiente modo:

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

Sus correspondientes valores son los de la derecha.

Puedes comprobarlo.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Esta configuración responde a las propiedades de arriba.

FÓRMULA DEL BINONIO DE NEWTON

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n}$$

Esta fórmula tiene $n+1$ términos y, en cada uno de ellos, las potencias de a y b suman n:

- Primer término o término que ocupar el lugar 1: $\binom{n}{0}a^n$
- Segundo término o término que ocupa el lugar 2: $\binom{n}{1}a^{n-1}b^2$
- Tercer término o término que ocupar el lugar 3: $\binom{n}{2}a^{n-2}b^2$
- .....
- $(n-1)$-ésimo término o término que ocupa el lugar $n-1$: $\binom{n}{n-2}a^2b^{n-2}$
- n-ésimo término o término que ocupa el lugar n: $\binom{n}{n-1}ab^{n-1}$
- $(n+1)$-ésimo término o término que ocupa el lugar $n+1$: $\binom{n}{n}b^n$