LOGARITMOS

Función exponencial y logarítmica:

1. Para cada una de las funciones que figuran a continuación, se pide: **i)** Tabla de valores y representación gráfica. **ii)** Signo de f(x). **iii)** Cortes con los ejes. **iv)** Intervalos de crecimiento. **v)** Dominio y recorrido. **vi)** Asíntotas. **vii)** Tendencia para los valores muy grandes y muy pequeños

a) $f(x)=10^x$ y $f(x)=\log x$ **b)** $f(x)=0{,}1^x$ y $f(x)=\log_{0,1} x$ **c)** $f(x)=e^x$ y $f(x)=\ln x$

d) $f(x)=3^x$ y $f(x)=\log_3 x$

■ **Definición de logaritmo:** $\boxed{\log_a x=n \text{ si y solo si } a^n=x}$ (donde $a>0$, $a\neq 1$)

■ **Sistemas de logaritmos más utilizados:**

NOMBRE	BASE	NOTACIÓN	DEFINICIÓN
Logaritmo decimal	a=10	log	$\log N = x \Leftrightarrow 10^x = N$
Logaritmo neperiano[1]	a=e	Ln, ln	$\ln N = x \Leftrightarrow e^x = N$

donde $e \cong 2{,}718281828459\ldots$ se llama cte. de Euler; es un número irracional.

Definición de logaritmo:

2. Utilizando la definición, hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9$
b) $\log_3 81$
c) $\log_3 1/9$
d) $\log_3(-9)$
e) $\log_2 \sqrt{2}$
f) $\log_2 \sqrt{8}$
g) $\log_{10} 1000$
h) $\log_4 2$
i) $\log_4 64$
j) $\log_{10} 0{,}01$
k) $\log_4 1/16$
l) $\log_5 0{,}2$
m) $\log_4 256$
n) $\log_4 1/64$
o) $\log_2 0{,}125$
p) $\log_4 1$
q) $\log_2 1024$
r) $\log_2 1/64$
s) $\log_3 \sqrt{27}$
t) $\log_2 \log_2 4$

*(Soluc: **a)** 2; **b)** 4; **c)** -2; **d)** ∄; **e)** 1/2; **f)** 3/2; **g)** 3; **h)** 1/2; **i)** 3; **j)** -2; **k)** -2; **l)** -1; **m)** 4; **n)** -3; **o)** -3; **p)** 0; **q)** 10; **r)** -6; **s)** 3/2; **t)** 1)*

3. Calcular los logaritmos decimales de los siguientes números (sin calculadora) y comprobar el resultado:

a) 10.000 **b)** 1.000.000 **c)** 0,001 **d)** 1/1.000.000 **e)** 10^8 **f)** 10^{-7}
g) 10 **h)** 1

*(Soluc: **a)** 4; **b)** 6; **c)** -3; **d)** -6; **e)** 8; **f)** -7; **g)** 1; **h)** 0)*

---

[1] En honor a John Napier (Neper, en latín), matemático inglés (1550-1617) inventor de los logaritmos.

4. Utilizando la definición de logaritmo, hallar el valor de x en cada una de las igualdades siguientes:

a) $\log_2 8=x$	**e)** $\ln x=2$	**i)** $\ln e^3=x$	**m)** $\log_x 0.01=2$	**q)** $\log_{0.25} x=2$
b) $\log_2 1/8=x$	**f)** $\log_3 x=-2$	**j)** $\log_x 64=1$	**n)** $\ln x=-1/2$	**r)** $\log_2(-16)=x$
c) $\log 100=x$	**g)** $\log_x 49=2$	**k)** $\log_x 25=-1$	**o)** $\log_{1/36} x=2$	**s)** $\log_x 125=-3$
d) $\log_3 x=3$	**h)** $\log_x 8=3$	**l)** $\log_{1/100} 100=x$	**p)** $\log_x 2=0$	**t)** $\log_3 \log_3 3)=x$

*(Soluc: **a)** 3; **b)** −3; **c)** 2; **d)** 27; **e)** e^2; **f)** 1/9; **g)** 7; **h)** 2; **i)** 3; **j)** 64; **k)** 1/25; **l)** −1; **m)** 0,1; **n)** $\sqrt{e}/e$; **o)** 1/1296; **p)** ∄; **q)** 0,0625; **r)** ∄; **s)** 1/5; **t)** 0)*

Cálculo logarítmico:

■ **Fórmulas del cálculo logarítmico:**

$$\boxed{\log(p\cdot q)=\log p+\log q}$$

$$\boxed{\log\frac{p}{q}=\log p-\log q}$$

$$\boxed{\log p^n=n\cdot\log p} \quad \boxed{\log\sqrt[n]{p}=\frac{1}{n}\log p}$$

(todas son válidas en cualquier base)

Casos particulares:

$$\boxed{\log_a a^x=x} \quad \boxed{a^{\log_a x}=x} \quad \boxed{\ln e^x=x} \quad \boxed{e^{\ln x}=x}$$

$$\boxed{\log_a a=1} \quad \boxed{\log_a 1=0} \quad \boxed{\ln e=1} \quad \boxed{\ln 1=0}$$

5. Aplicando las fórmulas anteriores, calcular:

a) $\log_6\frac{1}{36}$	**h)** $\ln\frac{1}{e}$	**p)** $\log_3\frac{\sqrt{3}}{9}$	**w)** $\log_3\frac{1}{\sqrt{243}}$	**γ)** $\ln\frac{e}{\sqrt[3]{e^2}}$
b) $\log_3\sqrt[4]{27}$	**i)** $\log_4 2$	**q)** $\ln\frac{\sqrt{e}}{e}$	**x)** $\log\sqrt{20}+\log\sqrt{5}$	**δ)** $\log_3\frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$
c) $\log_3\frac{\sqrt{243}}{3}$	**j)** $\log_8 2$	**r)** $\log_4(-4)$	**y)** $\log\frac{\sqrt[3]{100}}{10}$	**ε)** $\log_{1/5} 125$
d) $\log_a\frac{1}{\sqrt{a}}$	**k)** $\log_8\sqrt{32}$	**s)** $\log_2\sqrt[3]{32}$	**z)** $\log_3\frac{1}{27\sqrt[3]{9}}$	
e) $\ln e^2$	**l)** $\ln\sqrt[3]{e}$	**t)** $\log_3\sqrt{27}$	**α)** $\ln\frac{e}{\sqrt[4]{e}}$	
f) $\log_4\frac{1}{\sqrt[5]{64}}$	**m)** $\log_2 64$	**u)** $\log_2\frac{\sqrt[5]{64}}{8}$	**β)** $\log\frac{\sqrt{10}}{0,1}$	
g) $\log_3\sqrt[3]{9}$	**n)** $\log_4\frac{1}{64}$	**v)** $\ln\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$		
	o) $\log_3\frac{3}{\sqrt[5]{81}}$			

*(Soluc: **a)** −2; **b)** 3/4; **c)** 3/2; **d)** −1/2; **e)** 2; **f)** −3/5; **g)** 2/3; **h)** −1; **i)** 1/2; **j)** 1/3; **k)** 5/6; **l)** 1/3; **m)** 6; **n)** −3; **o)** 1/5; **p)** −3/2; **q)** −1/2; **r)** ∄; **s)** 5/3; **t)** 3/2; **u)** −9/5; **v)** −2/3; **w)** −5/2; **x)** 1; **y)** −1/3; **z)** −11/3; **α)** 3/4; **β)** 3/2; **γ)** 1/3; **δ)** −7/4; **ε)** −3)*

6. Expresar en función de log 2 los logaritmos decimales de los siguientes números, y comprobar con la calculadora:

a) 16	**d)** 0,25	**g)** 1/40	**j)** 0,32	**m)** $\sqrt[3]{0,08}$
b) 5	**e)** 0,625	**h)** $\sqrt[3]{16}$	**k)** 0,08	
c) 32/5	**f)** 250	**i)** 16/5	**l)** $\sqrt[5]{80}$	

*(Soluc: **a)** 4log 2; **b)** 1-log 2; **c)** -1+6log 2; **d)** -2log 2; **e)** 1-4log 2; **f)** 3-2log 2; **g)** -1-2log 2; **h)** $\frac{4}{3}\log 2$; **i)** -1+5log 2; **j)** -2+5log 2; **k)** -2+3log 2; **l)** $\frac{1}{5}(1+3\log 2)$; **m)** $-\frac{2}{3}+\log 2$)*

7. Expresar en función de ln 2:

a) $\ln 8$ **b)** $\ln\frac{e}{2}$ **c)** $\ln\frac{e^3}{4}$ **d)** $\ln\frac{4}{\sqrt{e}}$ **e)** $\ln\sqrt{2e}$

*(Soluc: **a)** 3 ln 2; **b)** 1−ln 2; **c)** 3−2 ln 2; **d)** $-\frac{1}{2}+2\ln 2$; **e)** $\frac{1+\ln 2}{2}$)*

8. Expresar en función de log 2 y log 3 los logaritmos siguientes, y comprobar con la calculadora:

a) log 25	**d)** log 9/4	**g)** log 162	**j)** log 90	**m)** log $\sqrt{3,6}$
b) log 24	**e)** log $\sqrt[3]{6}$	**h)** log 3,6	**k)** log 0,27	
c) log 4/3	**f)** log 30	**i)** log 1,2	**l)** log 0,72	

*(Sol: **a)** 2−2 log 2; **b)** 3 log 2+log 3; **c)** 2 log 2−log 3; **d)** 2 log 3−2log 2; **e)** $\frac{\log 2+\log 3}{3}$; **f)** 1+log 3; **g)** log 2+4 log 3; **h)** −1+2 log 2+2 log 3; **i)** −1+2 log 2+ log 3; **j)** 1+2 log 3; **k)** −2+3 log 3; **l)** −2+3 log 2+2 log 3; **m)** −1/2+ log 2+ log 3)*

9. Expresar en función de log 2, log 3 y log 7 los logaritmos siguientes:

a) log 84 **b)** log 0,128 **c)** log 0,125 **d)** log 14,4 **e)** log $\sqrt[3]{12}$

10. Justificar las siguientes igualdades:

a) $\frac{\log 6+\log 2}{\log 9+\log 8-\log 6}=1$ **b)** log 125=3(1−log 2) **c)** $\frac{\log 6+\log 3-\log 2}{\log 9-\log 3}=2$ **d)** $10^{-2\log 2}=\frac{1}{4}$

e) $\frac{1+\log 8}{\log 5+2\log}=1$

11. Sabiendo que log 7,354=0,866524..., hallar (sin calculadora):

a) log 735,4 **b)** log 0,007354 **c)** log 7354

12. Utilizando las fórmulas del cálculo logarítmico, desarrollar al máximo las expresiones siguientes:

a) $\log(2x)^3$	**d)** $\ln(ax^2)$	**g)** $\log\frac{mnp}{qr}$	**i)** $\log\left(\frac{mn}{p}\right)^r$
b) $\log(2x^3)$	**e)** $\ln(ax)^2$	**h)** $\log a^{3/4}$	**j)** $\ln\frac{1}{ex}$
c) $\log\left(\frac{2x}{y}\right)^2$	**f)** $\log\sqrt[3]{c}$		**k)** $\log\sqrt{mn}$

l) $\ln\sqrt{x^3}$

m) $\log(x^2-y^2)$

n) $\log\sqrt{\dfrac{m^n}{pq^r}}$

o) $\log\sqrt{m^2-n^2}$

p) $\log\dfrac{m^2-x^2}{\sqrt{m^2+x^2}}$

q) $\log\left(10\sqrt[3]{x}\right)$

r) $\log\sqrt{\dfrac{a^2b^3c^5}{mp}}$

s) $\log(x^n y^m)$

t) $\log\dfrac{2m^2n^3}{pq^4}$

u) $\ln\dfrac{\sqrt{x}}{x}$

*(Sol: **a)** 3 log 2+3 log x; **b)** log 2+3 log x; **c)** 2 log 2+2 log x−2 log y; **d)** ln a+2 ln x; **e)** 2 ln a+2 ln x; **f)*** $\frac{1}{3}\log c$; ***g)** log m+log n+log p−log q−log r; **h)*** $\frac{3}{4}\log a$; ***i)** r log m+r log n−r log p; **j)** −1−ln x; **k)*** $\frac{\log m+\log n}{2}$; ***l)*** $\frac{3}{2}\ln x$; ***m)** log(x+y)+log(x−y); **n)*** $\frac{n\log m-\log p-r\log q}{2}$; ***o)*** $\frac{\log(m+n)+\log(m-n)}{2}$; ***p)*** $\log(m+x)+\log(m-x)-\frac{1}{2}\log(m^2+x^2)$ ***q)*** $\frac{1+\log x}{3}$; ***r)*** $\frac{2\log a+3\log b+5\log c-\log m-\log p}{2}$; ***s)** n log x+m log y; **t)** log 2+2 log m+3 log n−log p−4 log q*

u) $-\frac{1}{2}\ln x$*)*

13. Obtener **x** en las siguientes expresiones:

a) $\log x = 1+2\log a$ $\qquad$ *(Soluc: $x=10a^2$)*

b) $\log x = 2(\log a+3\log b)-\dfrac{1}{2}(2\log c+\log d)$ $\qquad$ *(Soluc: $x=\dfrac{a^2b^6}{c\sqrt{d}}$)*

c) $\ln x = \dfrac{\ln a+2\ln b}{2}-3(2\ln a-\ln b)$

14. Sabiendo que x=7 e y=3, utilizar la calculadora para hallar:

a) $\log x^2$ **b)** log (2x) **c)** $\log^2 x$ **d)** log (x+y) **e)** log x + y **f)** $\log\dfrac{x+y}{2}$ **g)** $\dfrac{\log(x+y)}{2}$

15. a) Hallar **a** sabiendo que $\log_7\dfrac{a}{b}+\log_7 b = 2$ *(Soluc: a=49)*

b) Si $\log_4 N=3$, ¿cuánto vale $\log_4\dfrac{\sqrt[3]{N}}{N^3}$? ¿Cuánto vale N? *(Soluc: −8; N=64)*

***pág. 48** del libro.*

16. ¿En qué base se cumple que $\log_a 12+\log_a 3=2$? *(Soluc: a=6)*

17. ¿V o F? Razona la respuesta:

a) log (A+B)=log A + log B

b) $\log(A^2+B^2)=2\log A+2\log B$

c) $\dfrac{\ln 2x}{2}=\ln x$

d) $\ln\dfrac{2x}{2}=\ln x$

e) $\log\dfrac{AB}{C}=\dfrac{\log(AB)}{\log C}$

f) El logaritmo de un número siempre da como resultado un número irracional.

g) Los logaritmos decimales de números <1 son negativos; en caso contrario, son positivos.

18. CURIOSIDAD MATEMÁTICA: Comprobar la veracidad de la siguiente fórmula, debida al físico británico Paul Dirac (1902-1984), que permite escribir cualquier número N empleando solamente tres doses:

$$N=-\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{\text{(N raíces)}}$$

19. ¿Cuáles son los números cuyos logaritmos decimales están comprendidos entre 0 y 2? ¿Y entre 0 y −2? *(Soluc: 1 y 100; 0,01 y 1)*

Ecuaciones exponenciales:

20. Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales por el método más apropiado, y comprobar el resultado en cada caso:

a) $3^x = 48$ *(Soluc: x≅3,5237)*

b) $2^x = \dfrac{8}{27}$ *(Soluc: x≅ −1,7549)*

c) $2^{x+1} + 4 = 80$ *(Soluc: x≅5,2479)*

d) $2\cdot 3^x - 3^{2x} + 3 = 0$ *(Soluc: x=1)*

e) $3^{x-1} + 3^{x+1} - 3^x = 63$ *(Soluc: x=3)*

f) $2^{2x-3} = 8^{x+1}$ *(Soluc: x=-6)*

g) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$ *(Soluc: x=2)*

h) $2^{x-3} = -3$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

i) $5^{x-1} = 2 + \dfrac{3}{5^{x-2}}$ *(Soluc: x=2)*

j) $2\,e^{x-4} = 3$ *(Soluc: x≅4,4055)*

k) $100\cdot 10^x = \sqrt[x]{1000^5}$ *(Soluc: x=3)*

l) $3^{x/2} = 768$ *(Soluc: x≅12,0949)*

m) $4^{x^2+2} = 2^{-2}$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

n) $3^{2x+5} = 3^7$ *(Soluc: x=1)*

o) $\dfrac{1}{e^x} = 27$ *(Soluc: x≅−3,2958)*

p) $5^{x^2-5x+6} = 1$ *(Soluc: x_1=2, x_2=3)*

q) $3^x\cdot\left(3^2\right)^x = 9^3$ *(Soluc: x=2)*

r) $e^{2x} - 2e^{x+1} + e^2 = 0$ *(Soluc: x=1)*

s) $2^x - 10\cdot 2^x + 16 = 0$ *(Soluc: x≅0,83)*

t) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} + 2^{x+5} + 2^{x+6} = 31$ *(Soluc: x=−2)*

u) $e^{4x} - 5e^{3x} + 5e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$ *(Sol: x_1=2, x_2=ln2; x_3=ln3)*

v) $2^{x+1} = 4^{2x-4}$ *(Soluc: x=3)*

w) $3^{2x}\cdot 2^{3x-1} = 6^{x+1}$ *(Soluc: x=1)*

x) $e^{4x-x^2} = e^3$ *(Sol: x_1=1, x_2=3)*

y) $2^{x-3} = 3^{x+1}$ *(Soluc: x≅ −7,8380)*

z) $2^{2x} - 3\cdot 2^{x+1} + 8 = 0$ *(Soluc: x_1=1, x_2=2)*

α) $3^{2x-4} = 729$ *(Soluc: x=5)*

β) $e^{x-9} = \sqrt{73}$ *(Soluc: x≅11,1452)*

γ) $2^{x+9} = 3^x$ *(Soluc: x≅15,38)*

δ) $2^{1-x^2} = \dfrac{1}{8}$ *(Soluc: x=±2)*

ε) $10^{3-x} = 1$ *(Soluc: x=3)*

ζ) $3^x + 3^{1-x} = 4$ *(Soluc: x_1=0, x_2=1)*

η) $e^{x+2} + e^{x-1} = e^{2x} + e$ *(Soluc: x_1=−1, x_2=2)*

θ) $2^{x/2} = 768$

ι) $\sqrt[x]{a} = a^x$ *(Soluc: x=1)*

κ) $e^{2x} - 2e^x + 2 = 0$ *(Soluc: ∄ soluc.)*

λ) $4^x - 14\cdot 2^{x-1} + 12 = 0$ *(Soluc: x_1=2, x_2=log 3/log 2)*

μ) $2^{x-1}\cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$ *(Soluc: x=1)*

ν) $2^{2x} = 4^{x^2}$ *(Soluc: x_1=0, x_2=1)*

ξ) $2^{x+1}\cdot 3^{x-1} = 4^x$ *(Soluc: x=1)*

ο) $2^{x+1} = 3^{x-1}\cdot 4^x$ *(Soluc: x=1)*

π) $9^x + 2\cdot 3^{x+1} = 27$ *(Soluc: x=1)*

ρ) $4^x - 2\cdot 2^{x-1} = 6$ *(Soluc: x≅1,5850)*

σ) $11\cdot 3^x - 9^x = 18$ *(Soluc: x_1=2, x_2=log 2/log 3)*

τ) $3^{x-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$ *(Soluc: x=−2)*

υ) $2^{2x-1}-16=2^{x+1}$ *(Soluc: x=3)*

21. Considérese la siguiente fórmula:

$$U=P(\rho+V)^{-1/D}$$

Despejar ρ (Ayuda: no es necesario utilizar logaritmos) *(Soluc: $\rho=-V+P^{D}\cdot U^{-D}$)*

22. Sin necesidad de operar, razonar que ecuaciones del tipo:

$$2^{x}+3^{x}=0$$
$$4^{x-2}+2^{x^2+1}+2=0$$
$$x^2+5^{x}=0,\quad \text{etc.}$$

no pueden tener solución.

Ecuaciones logarítmicas:

23. Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas, comprobando la validez de las soluciones obtenidas:

a) 2 log x−log (x+6)=3 log 2 *(Soluc: x=12)*

b) $4\log_2(x^2+1)=\log_2 625$ *(Soluc: x=±2)*

c) $\log(x^2+1)-\log(x^2-1)=\log\frac{13}{12}$ *(Soluc: x=±5)*

d) ln (x−3)+ln (x+1)=ln 3+ln (x−1) *(Soluc: x=5)*

e) $2\log^2 x+7\log x-9=0$ *(Soluc: $x_1=10$; $x_2=\sqrt{10}/10^5$)*

f) 2 ln (x−3)=ln x−ln 4 *(Soluc: x=4)*

g) log (x+3)−log (x−6)=1 *(Soluc: x=7)*

h) log (x+9)=2+log x *(Soluc: x=1/11)*

i) log (x+1)+log (x−1)=1/100 *(Soluc: ∄ soluc.)*

j) $\log\sqrt{3x+5}+\log\sqrt{x}=1$ *(Soluc: x=5)*

k) $\log(x^2-7x+110)=2$ *(Soluc: $x_1=2$; $x_2=5$)*

l) 2 ln x+3 ln (x+1)=3 ln 2 *(Soluc: x=1)*

m) $\log(x^2+3x+36)=1+\log(x+3)$ *(Soluc: $x_1=1$; $x_2=6$)*

n) ln x+ln 2x +ln 4x=3 *(Soluc: x=e/2)*

o) 4 log x−2 log (x−1)=2 log 4 *(Soluc: x=2)*

p) ln (x−1)+ln (x+6)=ln (3x+2) *(Soluc: x=2)*

q) 2 log x+log (x−1)=2 *(Soluc: x=5)*

r) 2 log (x+9)−log x=2 *(Soluc: x≅1,81)*

s) log (2x+6)−1=2 log(x−1) *(Soluc: $x_1=2$; $x_2=1/5$)*

t) log (x+11)−2 log x=1 *(Soluc: x=11/10)*

u) $\log(6x-1)-\log(x+4)=\log x$ *(Soluc: x=1)*

v) $\log x^2+\log x^3=5$ *(Soluc: x=10)*

Sistemas de ecuaciones exponenciales y/o logarítmicas:

Cambio de base:

$\boxed{\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x}$ (fórmula del cambio de base)

24. Utilizando la fórmula del cambio de base se pide:

a) Demostrar que $\log_a b \cdot \log_b a=1$

b) Hallar la relación entre el logaritmo neperiano y el logaritmo decimal.

c) Expresar $\log_2 x$ en función de $\log x$ *(Soluc: $\log_2 x=3,3219 \log x$)*

25. a) Nuestra calculadora sólo dispone de logaritmos decimales. Usando la fórmula del cambio de base, hallar $\log_4 5$

b) Razonar que $\log_4 5$ es irracional.

26. Volver a hacer el ejercicio 2, pero utilizando esta vez la calculadora y la fórmula del cambio de base.