TEORIA DE RADICALES

Definición de raíz n-esima de un número real

Llamamos raíz n-ésima de un número real a, a otro número real b que, elevado a la potencia n, nos da como resultado el radicando

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$

Ejemplos : $\sqrt[5]{32} = 2$ pues $2^5 = 32$ $\qquad \sqrt[4]{81} = \pm 3$ pues $(\pm 3)^4 = 81$

En la siguiente raíz los elementos que la componen reciben el nombre de

$$c\sqrt[n]{a^m} = b \left\{ \begin{array}{l} \text{La letra } b \text{ es la raíz} \\ \text{La letra } n \text{ es el índice} \\ \text{La letra } m \text{ es el exponente del radicando} \\ \text{El signo} \sqrt{} \text{ se llama signo radical} \\ \text{La letra } c \text{ es el coeficiente} \\ \text{La expresión } a^m \text{ es el radicando} \end{array} \right.$$

Todas las operaciones en las que aparece el signo radical se llaman operaciones con radicales o simplemente radicales

Un radical es igual a una potencia de exponente fraccionario que tiene de base la base del radicando y de exponente una fracción cuyo numerador es el exponente del radicando y cuyo denominador es el índice del radical

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplos : $\sqrt[5]{2x^3} = (2x^3)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{5}} x^{\frac{3}{5}}$ $\qquad 2x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{x^3}\sqrt[3]{y}$

<u>Propiedad fundamental de los radicales</u>: El valor de un radical no cambia si se multiplican o se dividen el exponente del radicando y el índice del radical por un mismo número

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}}$$

Esta propiedad nos permite transformar radicales en otros equivalentes y se utiliza para:

1) **<u>Simplificar radicales</u>**: si dividimos el exponente de radicando y el índice del radical por el mismo número. Ejemplo : $\sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3}$

2) **<u>Reducir radicales a índice común</u>**: para ello calculamos previamente el mínimo común múltiplo de los índices y éste será el índice común. Posteriormente multiplicaremos el exponente de cada radical por el mismo número que hemos multiplicado sus índices

(es el que resulta de dividir el índice común por el índice que tenía el radical)

Ejemplo : $\sqrt[3]{2x^2}, \sqrt{y^3}, \sqrt[5]{3^2} \Rightarrow \sqrt[30]{2^{10}x^{20}}, \sqrt[30]{y^{45}}, \sqrt[30]{3^{12}}$

<u>Racionalizar</u> radicales es sustituir una fracción por otra equivalente que no tenga raíces en el denominador.

Estudiaremos los casos siguientes:

1) Si el denominador es un monomio con un radical de índice dos, se multiplican numerador y denominador por el radical del denominador.

$$\text{Ejemplo}: \frac{3}{4\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{4(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{4.5} = \frac{3\sqrt{5}}{20}$$

2) Si el denominador es un monomio con un radical de índice n, multiplicaremos los dos términos de la fracción por la raíz n-ésima de una expresión cuyo producto por el radicando del denominador sea potencia n-ésima perfecta

$$\text{Ejemplo}: \frac{3}{\sqrt[5]{2x^3y^2}} = \frac{3\sqrt[5]{2^4x^2y^3}}{\sqrt[5]{2x^3y^2}\sqrt[5]{2^4x^2y^3}} = \frac{3\sqrt[5]{2^4x^2y^3}}{\sqrt[5]{2^5x^5y^5}} = \frac{3\sqrt[5]{2^4x^2y^3}}{2xy}$$

3) Si en el denominador aparecen binomios con radicales de índice dos, se multiplican el numerador y el denominador por el conjugado del denominador
El conjugado se obtiene al cambiar el signo de uno de los términos del binomio
En el denominador queda el producto de una suma por una diferencia que es igual a la diferencia de sus cuadrados y de esta manera eliminamos sus raíces

$$\text{Ejemplos}: \frac{6}{\sqrt{5}+y} = \frac{6(\sqrt{5}-y)}{(\sqrt{5}+y)(\sqrt{5}-y)} = \frac{6\sqrt{5}-6y}{(\sqrt{5})^2-y^2} = \frac{6\sqrt{5}-6y}{5-y^2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2-6} = \frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{-4}$$

Los radicales son **homogéneos** si tienen el mismo índice. Ejemplo $\sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{yz}, \sqrt[5]{2x}$

Los radicales son **semejantes** si tienen el mismo índice y el mismo radicando.
Ejemplo $\sqrt[5]{x},\ -5\sqrt[5]{x},\ 3\sqrt[5]{x}$

Para **introducir un factor** dentro de un radical, basta elevar ese factor a un exponente igual al índice del radical. Ejemplo : $4x^2\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{4^3x^6y}$

Para **extraer factores** de un radical realizamos la división del exponente entre el índice. El cociente es el exponente del factor que extraemos de la raíz y el resto es el exponente del factor que se queda en el radicando. Sólo se pueden extraer los factores que tienen un exponente mayor o igual que el índice. Ejemplo : $\sqrt[3]{2^7x^3y^2} = 2^2x\sqrt[3]{2y^2}$

Operaciones con radicales.

Para sumar radicales tienen que ser semejantes. Para sumar radicales semejantes se suman los coeficientes de los sumandos y se deja el mismo radical.
En el caso de que los radicales no sean semejantes, hay que intentar transformarlos en otros equivalentes que sí lo sean (Reduciendo a índice común, racionalizando o sacando factores) En el caso que no se pueda, la operación se deja indicada.

$$\text{Ejemplo}: a\sqrt{bc} + a^2\sqrt{bc} - 2a\sqrt{bc} = (a + a^2 - 2a)\sqrt{bc} = (a^2 - a)\sqrt{bc}$$

Para multiplicar radicales tienen que ser homogéneos. Para multiplicar radicales homogéneos se multiplican los radicandos y los coeficientes dejando el mismo índice. Si los radicales no son homogéneos los transformamos reduciendo a índice común.

$$\text{Ejemplo}: \sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt{3y} = \sqrt[6]{2^2x^2}\cdot\sqrt[6]{3^3y^3} = \sqrt[6]{2^2\cdot3^3x^2y^3}$$

Para elevar un radical a una potencia elevaremos su radicando a dicha potencia.
Ejemplo : $(\sqrt[3]{x^2})^4 = \sqrt[3]{x^8}$

Raíz de una raíz es una raíz que tiene por índice el producto de los índices y el mismo radicando. Ejemplo : $\sqrt[5]{\sqrt[3]{xyz}} = \sqrt[15]{xyz}$

Operaciones con radicales

1.- Extrae las siguientes raíces:

$\sqrt{64}=$ $\sqrt{\frac{4}{225}}=$ $\sqrt{-16}=$ $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}=$

$\sqrt[3]{\frac{1}{729}}=$ $\sqrt{144}=$ $\sqrt{81}=$ $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}}=$

$\sqrt{-25}=$ $\sqrt[3]{64}=$

2.- Escribe como potencias los siguientes radicales:

$\sqrt[3]{3z}=$ $\sqrt[5]{a^3}=$ $\sqrt{x^4a^8}=$ $\sqrt[3]{\frac{c-2}{c+2}}=$

$\sqrt{y\sqrt[3]{y}}=$ $\frac{3a\sqrt{b^3}}{2\sqrt[3]{b^2}}=$ $2x^2\sqrt[5]{y^2}=$ $4\sqrt[3]{(x+y)^2}=$

3.- Escribe con radicales las potencias fraccionarias:

$2x^{\frac{1}{3}}=$ $(3ab^2)^{\frac{1}{3}}=$ $4(x\text{-}y)^{\frac{2}{3}}=$ $\frac{3x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{3}}}{4y^{\frac{4}{3}}}=$

4.- Extraer los factores posibles:

$\sqrt{216b^4}=$ $\sqrt{1024b^5}=$ $\sqrt{36b^3x^{12}}=$ $\sqrt{\frac{1}{4}b^3}=$

5.- Introduce los factores en el radical y simplifica:

$2x\sqrt{x}$ $3mx^2\sqrt{\frac{1}{3}mx}$ $\frac{4x}{3}\sqrt{\frac{9}{4}xy}$ $\frac{3}{8}\sqrt{\frac{2}{27}x}$

$3\sqrt[3]{3}$ $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$ $\frac{2a}{3}\sqrt[3]{\frac{9a}{16}}$ $(x\text{-}y)^2\sqrt[3]{5}=$

6.- Racionalizar:

$\frac{3}{\sqrt{9a}}=$ $\frac{2}{\sqrt{27}}=$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2x^3}}=$ $\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=$ $\frac{4}{\sqrt[5]{4x^2y^3z}}=$ $\sqrt[3]{\frac{3x}{2y^2z}}=$ $\sqrt[4]{\frac{2}{ab^2}}=$

$\frac{2}{\sqrt{x+y}}=$ $\frac{3}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=$ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a-b}}=$ $\frac{5}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$

$\frac{5}{\sqrt[3]{(2+x)^2}}=$ $\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{x}}=$ $\sqrt{\frac{1}{x\text{-}y}}=$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}=$

7.- Efectuar las siguientes sumas:

a) $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + 4\sqrt{2} =$

b) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$

c) $2\sqrt{20} + 4\sqrt{80} - 5\sqrt{180} + 3\sqrt{125} =$

d) $\frac{1}{4}\sqrt{128} + 6\sqrt{512} - \frac{1}{2}\sqrt{32} - 3\sqrt{98} =$

e) $\frac{2}{5}\sqrt{20} - \frac{3}{5}\sqrt{80} + \frac{1}{2}\sqrt{180} + 6\sqrt{45} =$

f) $\frac{4}{3}\sqrt{27} - \frac{1}{3}\sqrt{243} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} =$

8. – Efectúa las siguientes operaciones:

a) $12\sqrt{\frac{1}{3}} : \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{12}} =$

b) $26\sqrt{18} : 2\sqrt{\frac{9}{50}} =$

c) $\frac{4}{3}\sqrt{48} : \frac{1}{9}\sqrt{3} =$

d) $\left(2 + \sqrt{3}\right)^2 =$

e) $\left(2 - \sqrt{3}\right)^2 =$

f) $\dfrac{\left(4\sqrt{6} + 2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{6} - 2\sqrt{3}\right)}{2\left(10 - \sqrt{2}\right)} =$

g) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} =$

h) $8\left(\sqrt{\frac{25}{2}} + \sqrt{\frac{9}{8}}\right)\left(\sqrt{32} - 3\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

i) $\sqrt{2}\left(\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18}\right) =$

j) $\sqrt{3}\left(\sqrt{108} - \sqrt{27} + \sqrt{48}\right) =$

k) $a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a} =$

l) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4} =$

m) $2\sqrt{3}(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3}) =$

n) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{2}} =$

<u>Soluciones de los radicales propuestos</u>

1. $8,\ \frac{2}{15},$ no real, $-\frac{3}{4},\ \frac{1}{9},\ 12,\ 9,\ -\frac{2}{5},$ no real, 4.

2. $(3z)^{\frac{1}{3}},\ a^{\frac{1}{3}},\ x^2a^4,\ \left(\frac{c-2}{c+2}\right)^{\frac{1}{3}},\qquad y^{\frac{4}{6}} = y^{\frac{2}{3}},\ \dfrac{3ab^{\frac{3}{2}}}{2b^{\frac{2}{3}}},\ 2x^2y^{\frac{2}{5}},\ 4(x+y)^{\frac{2}{3}}$

3. $2\sqrt[3]{x},\ \sqrt[3]{3ab^2},\ 4\sqrt[3]{(x-y)^2},\ \dfrac{3\sqrt[5]{x^2}\sqrt[3]{y}}{4\sqrt[3]{y^4}}$

4. $6b^2\sqrt{6},\ 2^5b^2\sqrt{b},\ 6bx^6\sqrt{b},\ \frac{1}{2}b\sqrt{b}$

5. $\sqrt{4x^3},\ \sqrt{3m^3x^5},\ \sqrt{4x^3y},\ \sqrt{\frac{1}{3.2^5}x},\qquad \sqrt[3]{3^4},\ \sqrt[3]{\frac{8}{3}},\ \sqrt[3]{\frac{a^4}{6}},\sqrt[3]{5(x-y)^6}$

6. $\dfrac{\sqrt{a}}{a},\ \dfrac{2\sqrt{3}}{9},\ \dfrac{\sqrt{x}}{x^2},\ \dfrac{\sqrt{10}}{5},\qquad \dfrac{3\sqrt[3]{4}}{2},\ \dfrac{2\sqrt[5]{2^3x^3y^2z^4}}{xyz},\ \dfrac{\sqrt[3]{12xyz^2}}{2yz},\ \dfrac{\sqrt[4]{2a^3b^2}}{ab},$

$\frac{2\sqrt{x+y}}{x+y}$, $\frac{3(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}$, $\frac{\sqrt{2(a-b)}}{a-b}$, $\frac{5(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$,

$\frac{5\sqrt[3]{2+x}}{2+x}$, $\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{x})}{4-x}$, $\frac{\sqrt{x-y}}{x-y}$, $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{3}-\sqrt{6})}{-3}$,

7. a) $5\sqrt{2}$; b) 0; c) $5\sqrt{5}$; d) $75\sqrt{2}$; e) $\frac{97}{5}\sqrt{5}$; f) $-2\sqrt{3}$

8. a) 96; b) 130; c) 48; d) $7+\sqrt{3}$; e) $7-\sqrt{3}$; f) 3; g) -1; h) 130; i) 4; j) 21; k) $a^{2}\sqrt[12]{a}$;
l) $2\sqrt[3]{3}$; m) $2\sqrt[6]{3^3 2^4} - 2\sqrt[4]{3^3}$; n) $\sqrt[12]{\frac{2^7}{3^7}}$;